This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

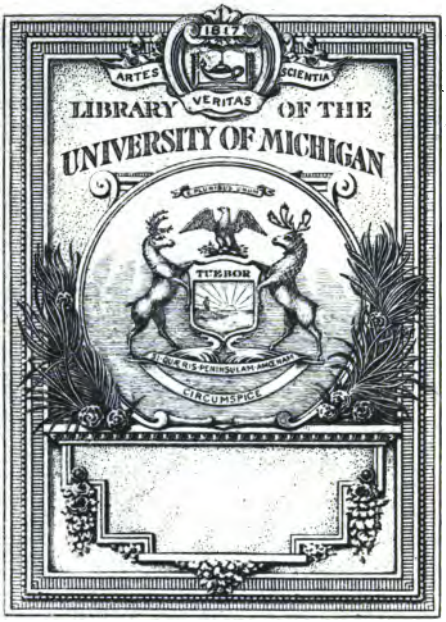
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

66


ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Q
157
.R29
1782
v.1

[RECCARD.]

Lehr-Buch

darin

ein kurzgefaßter

Unterricht

aus verschiedenen

philosophischen und mathematischen Wissenschaften, der Historie und Geographie

gegeben wird.

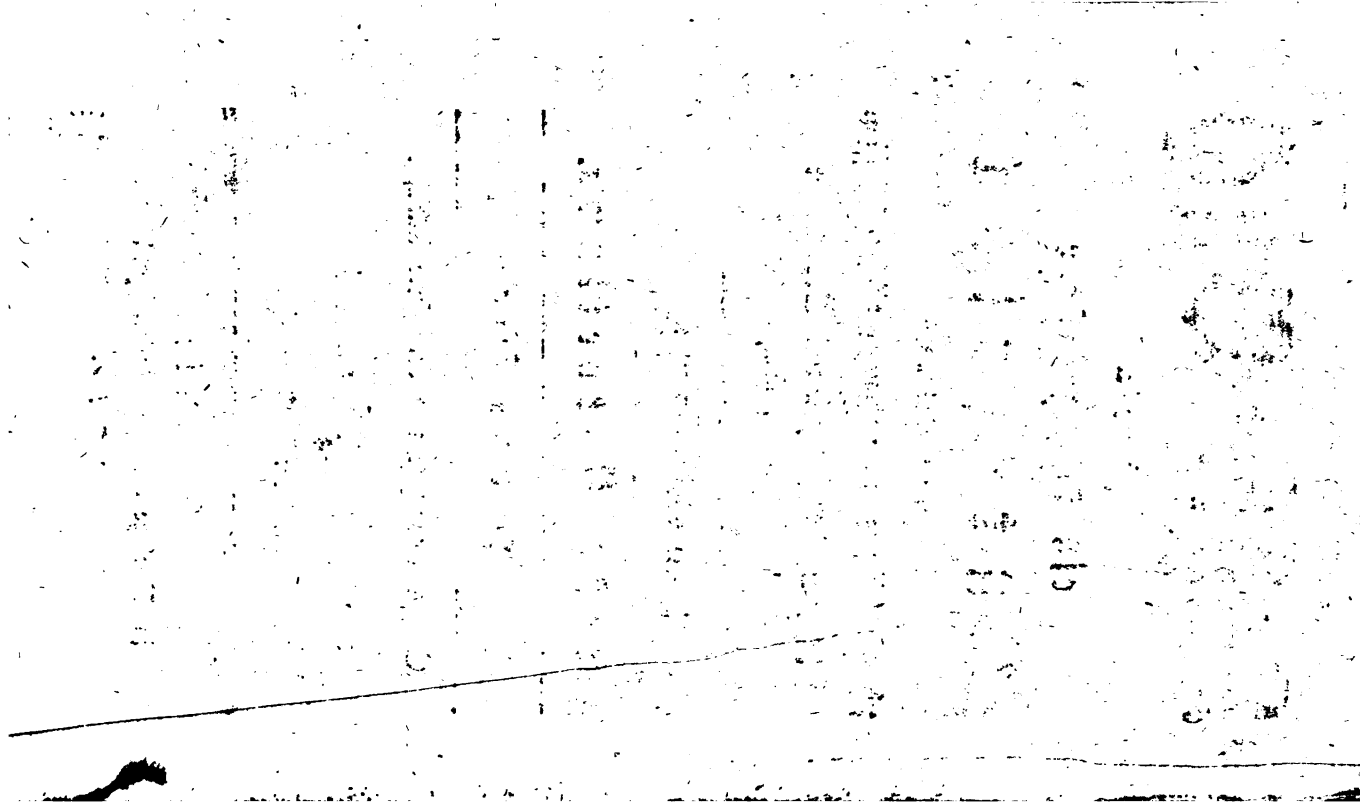
Zum Gebrauch in Schulen.

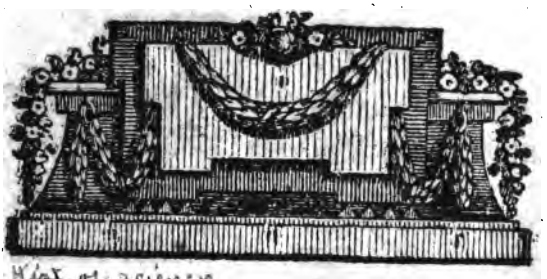
Erste Abtheilung.

Mit Kupfern.

Sechste vermehrte und verbesserte Auflage.

Berlin,
im Verlage der Realschulbuchhandlung.
1784.





Hist. of science
Stechert
7-22-43
48442
2 V.

Vorrede
der ersten Auflage.

Dieses Buch enthält einen kurzen Entwurf der vornehmsten Lehren verschiedener Wissenschaften, sofern sie selbst in niedern Schulen gelehrt werden können. Es ist jedermann von der Möglichkeit und dem Nutzen, vielleicht auch von der Nothwendigkeit eines solchen Unterrichts überzeugt, die Schwierigkeiten entstehen gemeiniglich alsdenn erst, wenn es auf die Mittel ankommt, dergleichen ins Werk zu richten. Was mich betrift, so durfte ich nur bemühet seyn, das zu thun, was zur Beförderung eines solchen Unterrichts von Seiten eines Lehrbuchs erfordert wird.

Es wurde mir befohlen, das in dem Königlichen Preußischen Land-Schul-Reglement vom 12 August 1763. §. 20. verordnete Lehrbüchlein von allerhand nöthigen und nützlichen Dingen zu verfertigen, ich machte einen Entwurf dazu und zugleich den Anfang des Buchs selbst; man fand, daß es für den daselbst bestimmten Gebrauch zu weitläuftig sey, indessen sollte ich nach dem angegebenen Plane fortarbeiten, um ein Lehrbuch für Stadtschulen zu verfertigen, zugleich aber aus demselben einen Auszug machen, welches nach der Vorschrift des Reglements in den Landschulen gebraucht werden könne. Diese beyden Bücher erscheinen jetzt zu gleicher Zeit im Drucke.

Es kann einem Schriftsteller kein grösserer Gegenstand gegeben werden, als derjenige, welchen ich hatte; aber meine Beschäftigung mit demselben war sehr eingeschränkt. Die ganze Gelehrsamkeit, außer der Theologie, war mein Vorwurf, aber ich durfte aus dem großen Umfange desselben auch in dem gegenwärtigen weitläuftigeren Werke nur diejenigen Lehren wählen, welche Kinder, und zwar nicht nur solche, welche dereinst Gelehrte werden sollen, sondern auch diejenigen, welche zu andern Lebensarten bestimmt sind, erlernen können. Ich

mußte

mußte daher verschiedene Wissenschaften ganz weglassen, und aus den übrigen nur das nehmen, was am nöthigsten oder nützlichsten zu wissen und am leichtesten zu begreifen ist. Ich konnte nicht allemal die an sich wichtigsten Wahrheiten wählen, ich mußte oft diejenigen vorziehen, welche einen nähern Einfluß in die Künste, in die Handwerke, und in das gemeine Leben haben, ich durfte nur solche Sachen vortragen, von welchen eine blos historische Erkenntniß nützlich seyn kann, und ich mußte verschiedene blos um des Zusammenhangs willen anführen. Die folgenden Tabellen enthalten den ganzen Entwurf der Lehren, die ich in der gegenwärtigen Schrift wirklich vorgetragen habe. Die Ordnung derselben konnte anders und vielleicht in verschiedener Absicht besser eingerichtet seyn; diejenige, der ich gefolgt bin, war weniger eine Folge von der Bemühung ein System zu suchen, als von der Unmöglichkeit eines zu vermeiden.

Es war mir befohlen, in Fragen und Antworten zu schreiben, indessen habe ich das Buch so einzurichten gesucht, daß nach demselben sowohl tabellarisch, wie es in dem Berlinischen Schulbuche vorgeschrieben ist, als catechetisch, oder auch nach einer andern Methode gelehret

werden kann, indem die Fragen blos als Anzeigen des Inhalts der darauf folgenden Antworten, und diese, wenn man will, als Paragraphen angesehen werden können. Es sind die Antworten bisweilen ziemlich weitläuftig geworden, um die Menge der Fragen nicht zu sehr anzuhäufen und das Buch dadurch nicht gar zu groß zu machen, aber ich habe diese Antworten in Absätze abgetheilet, aus welchen bey dem Unterrichte sogleich mehrere Fragen zu machen, einem geschickten Lehrer unmöglich schwer fallen kann. Die Sachen, welche sich entweder in den Zusammenhang der Fragen nicht wohl schicken wollten oder von geringerer Wichtigkeit waren, und daher größtentheils bey dem ersten Unterrichte ganz übergangen werden können, sind in Anmerkungen beygefügt worden. Die vornehmsten Fragen sind mit einem Sternchen bezeichnet, und dieses sind sonderlich diejenigen, welche in dem Auszuge allein enthalten sind.

Ich habe alle Vorsichtigkeit gebraucht, nur solche Sachen vorzutragen, welche bewiesen werden können, ob ich gleich die Beweise selbst, und dieses sogar auch in der Geometrie weglassen mußte, theils um nicht zu weitläuftig zu werden, theils weil die Anfänger, wie man

sagt,

sagt, dergleichen Beweise nicht fassen können. Aus denselben Ursachen durfte ich mich nie in ausführliche Untersuchungen einer Sache einlassen, ich mußte bey den wichtigsten Lehren da aufhören zu schreiben, wo ich oftmals am liebsten fortgefahren wäre. Es soll dieses Buch nur eine Sammlung von Ueberschriften solcher Lehren seyn, davon ein ausführlicher Unterricht in andern Büchern gesucht oder von dem Vortrage des Lehrers erwartet werden muß; es soll nur ein Register über einige gelehrte Erkenntnisse oder in Ansehung der verschiedenen Theile der Gelehrsamkeit das seyn, was in einem geographischen Atlas die Charte vom Globus ist.

Ich habe alle Ueberlegungen angestellt, die ich machen mußte, um die schicklichste Schreibart zu wählen, darin ich diesen Aufsatz verfertigen konnte. Das Resultat davon war, daß ich lieber die kurze, ungekünstelte, ernsthafte und bestimmte Art des Vortrages, welche den besten Lehrbüchern eigen ist, mir zur Vorschrift machen, als irgend einer andern folgen wollte, in welcher das Buch entweder desto weitläuftiger, oder die Gefahr, bey den Lesern unvollständige oder gar unrichtige Begriffe hervorzubringen, desto größer geworden wäre, je mehr sie sich von der ersten entfernt hätte; gesetzt

auch, daß es in der letztern angenehmer oder leichter zu lesen wäre. Mich dunkt, ein Schriftsteller muß so schreiben, daß er allemal noch etwas dem Nachdenken des Lesers, und wenn er ein Lehrbuch schreibt, sehr vieles der weitern Erklärung des Lehrers überläßt. Es ist sogar für den Leser nicht so schädlich, einige Stellen in einer Schrift nicht sogleich oder wohl gar nicht zu verstehn, als dadurch zu Irthümern verleitet zu werden. Ich habe daher in allen den Fällen, in welchen die Deutlichkeit der Richtigkeit, die Einfalt der Kürze und der Ausdruck der Wahrheit aufzuopfern war, mir kein Bedenken daraus gemacht, dieses wirklich zu thun; die Wahrheit und die Richtigkeit des Vortrages war mir mehr werth, als die Schönheit oder Leichtigkeit der Schreibart und das Urtheil einiger Leser über beydes.

Um nichts zu versäumen, was mir bey der Ausarbeitung einer Schrift, welche zu einem so allgemeinen Gebrauche bestimmt ist, obliegen konnte, habe ich die Handschrift einem der größten Gelehrten vorher zur Prüfung übergeben, welcher die Gütigkeit gehabt hat, verschiedene Stellen darin zu verbessern, und einige Zusätze dazu zu machen. Indessen weiß ich es wohl, daß nicht alle meine Leser so wie dieser Gelehrte von meiner Arbeit urtheilen werden.

Wenn

Wenn man blos für Gelehrte schreibt und Sachen vorträgt, welche über den Horizont der Anfänger sind: so wird man gemeiniglich glücklicher Weise von den kleinen Gelehrten nicht bemerket, die Urtheile der wahren Gelehrten aber können einem Schriftsteller allemal nützlich seyn, selbst in dem Fall, wenn sie ihn tadeln. Wenn man hingegen Compendien und Anfangsgründe von Wissenschaften schreibt: so wird man von den großen Gelehrten selten bemerkt, aber man ist den Critiken selbst der Schüler und einer Menge von Halbgelehrten ausgesetzt, welche, indem sie durch Eigendünkel ersetzen, was ihnen an gründlicher Einsicht fehlt, auf den Ruhm alles zu wissen Anspruch machen, und gemeiniglich nur gar zu viel Trieb empfinden, alles zu beurtheilen. Ich sehe in der That eine Menge von Einwürfen voraus, welche von solchen gegen mein Buch werden gemacht werden, es würde mir leicht seyn, viele davon anzuführen, um diejenigen, die sie machen werden, der Mühe zu überheben sie zu erfinden, und noch leichter, darauf zu antworten; aber ich kann ihnen leicht die Freiheit lassen, ein geringes Schulbuch zu tadeln, und sie werden mir dafür diejenige lassen, ihren Tadel zu verachten. Jedoch eines einzigen Einwurfs, den ich gewiß zu erwarten habe, muß ich Erwehnung thun.

Da dieſes Buch nur für ſolche, welche erſt anfangen etwas zu lernen, geſchrieben iſt: ſo möchte der ſcheinbarſte und erheblichſte Einwurf, der mir gemacht werden könnte, wol dieſer ſeyn, daß darinnen vieles vorkomme, welches überhaupt für einfältige Kinder, oder, was ich noch mehr beſorge, gar für Lehrer derſelben zu hoch und zu ſchwer ſey. Ich bin faſt geneigt, dieſes ganze Vorgeben zuzugeben, ob ich gleich die Folge leugne, die daraus hergeleitet werden ſoll, und nur diejenigen, die mir dieſes vorwerfen, zu fragen: ob dieſe Unfähigkeit, ein teutſches Buch, welches nur die erſten Anfangsgründe einiger Wiſſenſchaften enthält, zu verſtehen, der menſchlichen Vernunft eigenthümlich, ob die Schwierigkeit ſie zu heben überwindlich ſey, ob die Kinder nicht weitere Einſichten und beſſere Ausdrücke derſelben lernen ſollen, blos deswegen, weil ſie ſo unglücklich ſind, die einen noch nicht zu haben, und die andern noch nicht zu verſtehn, und ob ſie immer dumm bleiben ſollen, weil ſie es einmal ſind, und endlich ob man es aus richtig angeſtellten Verſuchen wiſſen könne, daß die Jugend keines beſſern Unterrichts fähig ſey, als ſie bisher in vielen Schulen gehabt hat. Ich werde ſie bitten, wenn ſie dieſes alles nicht annehmen wollen, die Stellen, die ſie nicht verſtehn, entweder zu überſchlagen, oder ſich ſolche von ihren Vorge-

ſetz-

sten erst erklären zu lassen, wobey ich einen andern Einwurf, der hier gemacht werden könnte, lieber übergehen, als beantworten will. Wenn sie gar so weit gehen wollten, zu behaupten, ich hätte dieses Buch so abfassen müssen, daß es ein jeder, auch der einfältigste Mensch, der nur lesen kann, sogleich verstehen könne: so werde ich ihnen willig bekennen, daß ich so nicht schreiben konnte, und ihnen sagen, daß sie es jetzt nicht mehr mit mir zu thun haben, weil ich dieses Buch nie geschrieben haben würde, wenn es mir nicht wäre befohlen worden. Wollen sie mich endlich noch mehr in die Enge treiben: so werde ich aufhören zu antworten und es bereuen, daß ich einmal geantwortet habe. Der Ruhm sie zu überwinden ist viel weniger werth, als das Glück mit ihnen nicht zu streiten.

Indessen werde ich selbst allezeit unter denen seyn, welche an diesem Buche noch vieles auszusetzen finden, und die freundschaftliche Mittheilung gegründeter Verbesserungen desselben wird mir desto angenehmer seyn, je eilfertiger und unterbrochener ich es wegen vieler andern Geschäfte ausarbeiten müssen, und je mehr ich wünsche, daß es künftig immer brauchbarer werden möge. Es war mir oftmals nicht möglich,

lich, dabey alle Hülfsmittel zu gebrauchen, die ich bey mehrerer Muße hätte gebrauchen können oder sollen, es ist nichts leichter, als in solchen Umständen bisweilen entweder seinem Gedächtniß oder den Büchern, die man vor sich hat, zu viel zuzutrauen, oder, indem man selbst öfters, um eine einzige Zeile zu schreiben, verschiedene der besten Bücher nachschlägt, etwas zu übersehn oder zu verschreiben. Es kann seyn, daß ich sonderlich bey Verfertigung der beyden letzten Capitel weniger Glück als Behutsamkeit gehabt habe, diese Fehler zu vermeiden.

Ich habe nicht für nöthig gehalten, die Bücher, deren ich mich bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuches bedient habe, anzuzeigen, weil das meiste, was darin vorgetragen ist, in hundert bekannten Schriften jedoch zerstreuet gefunden wird, und weil es den Lehrern sowohl, die dieses Buch brauchen werden, als ihren Schülern, die ohnedem keine Bibliotheken haben, gleichgültig seyn kann, welche von diesen ich wirklich nachgeschlagen habe. Bey den fünf ersten Capiteln zog ich andere Bücher gemeiniglich alsdenn erst zu Rathe, wenn ich geschrieben hatte, was ich für gut fand; bey den drey letztern aber war ich genöthiget, mehr Auszüge zu machen, doch habe ich die Eintheilungen

geän-

geändert, wo es mir nöthig schien, und mich nie an ein Buch allein gebunden.

Es ist dieses Lehrbuch vermuthlich nicht zu groß dazu, daß es in einem halben Jahre durchgegangen werden kann, wenn man über die sechs ersten Capitel in vormittägigen, über die beyden letztern aber in nachmittägigen Stunden lehren, und auf jedes der erstern einen Monat, auf jedes der letztern aber ein Vierteljahr anwenden will. Die Lehrer werden wohl thun, wenn sie zuerst die vorangesetzten Tabellen durchgehn, auch hernach bey der Erklärung des Buchs selbst ihre Schüler immer auf dieselben zurückführen, und bey dem Anfange jeder Stunde das Stück der Tabelle, wozu die Fragen gehören, die erkläret werden sollen, mit den Anfangsbuchstaben an eine Tafel anschreiben wollen. Die längern Antworten der Fragen hat der Lehrer in mehrere Fragen zu zergliedern, die dunklern Wörter aber und den Kindern ungewohntere Ausdrücke durch bekanntere zu erklären: überdem wird derselbe, wo es nöthig ist, Exempel beyfügen, die Anwendung der vorgetragenen Lehren nebst den Vortheilen, welche man von ihrer Einsicht haben kann, anzeigen, und Anmerkungen machen, welche sich auf den Ort, wo die Schule ist, und die besondern Umstände derer, die unterrich-

tet

ret werden, beziehen. Verschiedene Fragen, z. E. die mehresten von der Gelehrtenhistorie, sind nur mit solchen Schülern durchzugehen, welche künftig Gelehrte werden sollen. Einige Sachen, davon in dem Buche Nachricht gegeben wird, z. E. einige physikalische Experimente, das Feldmessen, die geometrische Körper, ferner einige der vornehmsten Sterne, verschiedene Kräuter, Steine u. d. gl. sind den Schülern zu zeigen, woraus Ermunterungen und Belohnungen des Fleißes gemacht werden können. Die meisten vorgetragenen Lehren sind so beschaffen, daß es außer dem Nutzen, den sie haben können, sehr vergnügend ist, sie zu wissen, es werden in der That wenige Schüler, selbst von dem niedrigsten Stande, nicht wißbegierig genug seyn, sie lernen zu wollen. Es wird daher dem Lehrer, wenn er sonst die Kunst zu unterrichten verstehet, nicht viel Mühe kosten, sich aufmerksame Schüler zu verschaffen. Es wird nicht nöthig seyn, vieles aus dem Buche auswendig lernen zu lassen, am wenigsten sind die vielen Namen und Jahrzahlen in dem siebenten Capitel zum auswendig lernen, sie sollen hauptsächlich nur dazu dienen, daß die Schüler, wenn sie künftig historische Schriften lesen, dieses ihr erstes Lehrbuch nachschlagen können, um daraus zu ersehen, in welche Zeiten und in welchen Zusammenhang mit der allgemeinen Geschichte der Welt die

Vorge-

Begebenheiten gehören, davon sie in solchen Schriften ausführlichere Nachrichten vorfinden. Eben so ist in dem letzten Capitel eine Menge von Städten blos deswegen angezeigt worden, damit die Schüler solche theils in den Landcharten aufsuchen, theils, wenn von denselben in den Zeitungen etwas gemeldet wird, sie in dem Buche nachschlagen können, um dadurch mit zu erfahren, in welchen Ländern sie liegen. Ich habe es ganz den Lehrern überlassen müssen, von den Lebensumständen der in der Historie angezeigten Regenten und berühmten Leute, und von den Merkwürdigkeiten der in der Geographie angeführten Städte nähere Nachrichten aus andern Büchern bey dem Unterrichte selbst zu erzählen, wenn sie es nöthig finden.

Der gütige Gott wolle diejenigen, welchen das Amt anvertrauet ist, die Jugend zu erziehen und zu unterrichten, tüchtig und willig machen, diese wichtigen und heilsamen Beschäftigungen, welche einen so großen Einfluß in die Wohlfahrt des Staats haben, und an welchen nach der Versicherung unsers Heilandes selbst die Engel im Himmel Antheil nehmen, also zu verrichten, daß ihre Bemühungen zur Verherrlichung seines

Namens

Namens und zum Vortheile des menschlichen Geschlechts gereichen, und sie in der Ewigkeit noch reichliche Früchte und selige Belohnungen derselben genießen mögen. Berlin, den 20sten Januarii, 1765.

Der Verfasser.

Vorrede
zur zweyten Auflage.

Dieses Buch hat das Glück gehabt, besser aufgenommen zu werden, als ich es um verschiedener Ursachen willen vermuthen durfte. Es sind zwar einige von den Einwendungen gegen dasselbe, die ich in der ersten Vorrede vorausgesaget hatte, wirklich gemacht worden, und man hat hinzugesetzt, daß es nicht practisch genug geschrieben sey: allein es ist solches, so viel ich weiß, nicht von Gelehrten und wenigstens in keiner öffentlichen Schrift geschehn. Die Recensionen in den gelehrten Zeitungen sind vielmehr für dasselbe so vortheilhaft als möglich gewesen, ich bezeuge dafür hiedurch meine schuldigste Dankbarkeit, und schreibe es denselben vornehmlich zu, daß es jetzt zum zweytenmale gedruckt werden muß. Es sind mir keine Verbesserungen desselben von andern Gelehrten, ob ich es gleich sehr gewünscht hätte, und verschiedene darum gebe-

ten habe, zugeschickt worden, außer einigen wenigen in der Gelehrten-Historie, welche der gelehrte Herr Prediger Des Champs in London mir mitzutheilen die Gütigkeit gehabt hat. Es hätten indessen bey dieser neuen Auflage viele Verbesserungen und Zusätze gemacht werden können; allein die vorgegangene Veränderung meines Amts und Aufenthalts, viele anderweitige mir obliegende Geschäfte, und die Eilfertigkeit des neuen Drucks haben mir kaum so viel Zeit übrig gelassen, daß ich das Buch durchblättern und nur hin und wieder etwas weniges verbessern oder zusetzen können. —

Es wird ein großes Vergnügen für mich seyn, wenn dieses Buch den Beyfall der Kenner noch ferner behaupten kann, aber ein noch größeres, wenn nützliche Erkenntnisse dadurch befördert werden. Königsberg in Preußen, den 26. Jul. 1766.

Gotthilf Christian Reccard,

Königl. Consistorialrath, D. und Prof. ordinar. der Theologie, Pfarrer der Sackheimischen Kirche und Director des Collegii Fridericiani.

Vorbericht

zur sechsten Auflage.

Bey Veranstaltung der sechsten Auflage dieses Lehrbuchs hat die Buchhandlung der Realschule auf Verlangen des Herrn Verfassers, der schon bey mehreren vorigen Auflagen durch seine weitläuftigen Amtsgeschäfte an der Verbesserung derselben gehindert worden ist, mich ersucht, die Ausgabe zu besorgen. Der Herr Verfasser hat mich dabey mit dem gütigen Vertrauen beehrt, mir eine uneingeschränkte Vollmacht zu allen den Veränderungen zu ertheilen, welche ich nöthig fin-

den würde. Dieser Erlaubniß habe ich mich vornehmlich in den mathematischen und physikalischen Abschnitten dieses Buchs bedient, und ich bin aus mehreren Gründen veranlaßt worden, in dem dritten und vierten Capitel beträchtliche Veränderungen und Zusätze zu machen.

In der Zeit, welche seit der ersten Ausgabe dieses Lehrbuchs verflossen ist, hat man sich, wie mich dünkt, mehr darüber vereinigt, daß ein früher Unterricht in der Mathematik und Physik, der mehr als die Oberfläche dieser Wissenschaften berührt, auf Schulen nothwendig sey. Man erwartet daher gegenwärtig von einem Schulbuch zum Theil dasjenige, was man vormals vielleicht an ihm getadelt hätte. Ich glaube, daß dies der Fall auch bey diesem Lehrbuch sey, und da dasselbe gleich bey seiner ersten Ausgabe mit so allgemeinem Beyfall aufgenommen worden ist, und bisher auch an seinem Theil viel zur Verbreitung nützlicher

Kennt-

Kenntnisse beygetragen hat, so hielt ich dafür, ihm so viel Achtung schuldig zu seyn, daß ich es mit aller Sorgfalt von neuem so bearbeitete, daß es unter verschiedenen neueren guten Schulbüchern, die zum Theil durch dasselbe veranlaßt sind, nicht veralten, und den Beyfall, den es bisher verdient und gehabt hat, fernerhin behalten mögte.

Das ganze Lehrbuch war schon in seiner ersten Anlage nicht für die ersten Anfänger bestimmt. Bey der Erweiterung des dritten und vierten Capitels, und überhaupt bey denen Zusätzen, die ich zu den übrigen Abschnitten desselben gemacht habe, durfte ich noch weniger erste, oder doch wenigstens nicht sehr junge Anfänger voraussetzen. Ich habe vielmehr bey meiner Arbeit die mittleren Classen solcher Schulen, welche mehrentheils künftige Gelehrte, und die höheren Classen solcher Schulen, welche mehrentheils künftige Künstler, z. B. Architecten, Ingenieurs, Feldmes-

ser u. a. erziehen, vor Augen gehabt. Die Königl. Realschule vereinigt beyde dergleichen Schulen, und da dieses Buch ohnehin zunächst für diese Schule bestimmt ist; so habe ich es desto mehr für zweckmäßig gehalten, aus diesem Gesichtspunct zu arbeiten.

Die Bereicherung des dritten und vierten Capitels mit mehreren mathematischen Wahrheiten, z. B. die Einschaltung der Rechnung mit Decimalbrüchen, Logarithmen, der Trigonometrie u. dergl. machte es mir zugleich nothwendig, einen durchgängig blos historischen Vortrag zu vermeiden. Für Lehrer würde es, wenigstens nach meinem Gefühl, eine unerträgliche Beschäftigung seyn, so viele Regeln und Wahrheiten blos dem Gedächtniß ihrer Lehrlinge anzuvertrauen, und es würde auch von einem solchen Vortrage wenig Nutzen für diese zu erwarten seyn. Ueberdem erforderte die Absicht, dieses Buch zum vorläufigen Unterricht

terricht für künftige Gelehrte einzurichten, eine Art des Vortrages, welche zwischen dem blos historischen und dem ununterbrochenen und streng demonstrativischen Vortrage das Mittel hielt. Diesen habe ich gewählt, und ich habe dabey beständig den Zweck vor Augen gehabt, geschickten Lehrern mannichfaltige Gelegenheiten zu geben, ihre Schüler zu einer gründlicheren Erlernung der Mathematik vorzubereiten, sie im Voraus in der Kunstsprache der Meßkunst zu üben, sie mit manchen Kunstgriffen der mathematischen Lehrmethode vorläufig bekannt zu machen, ihnen eine vorläufige Fertigkeit im Rechnen, Zeichnen, insonderheit auch in den geometrischen Berechnungen, wodurch für den künftigen demonstrativischen Vortrag viele Zeit erspart werden kann, zu verschaffen, sie im voraus einige Beweise wichtiger arithmetischer und geometrischer Sätze kennen, und hie und da einzelne Glieder der ganzen Kette von Wahrheiten, welche diese Wissenschaften enthalten, an einander reihen zu lehren, und

überhaupt dafür zu sorgen, daß ihnen bey dem künftigen gründlicheren Unterricht nichts oder wenig völlig fremde sey.

Ausdruck und Art des Vortrags habe ich durchgängig gleichförmig zu erhalten gesucht. Jedoch habe ich in den letzten Bogen des vierten Capitels mich weniger, als im Anfange geschehen ist, herabzulassen mich bemühet. Einem Schüler, der alles vorhergehende gut innhat, kann und muß man da auch mehr als vorher zutrauen. Manches wird vielleicht zu weitläuftig scheinen, indessen muß man bedenken, daß ein solches Schulbuch theils zugleich den Schüler, sich in der Wissenschaft, die er lernt, ausdrucken lehren, theils bey schwereren Materien ihm beym eigenen Nachlesen zu Hülfe kommen, und dem Lehrer dabey nichts weiter übrig lassen muß, als durch viele Beyspiele den Vortrag zu erläutern. Die vornehmsten Fragen, insonderheit diejenigen, welche Aufgaben

gaben enthalten, habe ich auch, wie es schon in den vorhergehenden Ausgaben geschehen war, gern unabhängig von den Anmerkungen zu machen gesucht, damit Schullehrern bey dem Unterricht über dieses Buch frey bliebe, manche der letztern, welche sie etwa den Fähigkeiten ihrer Schüler nicht angemessen finden möchten, wegzulassen.

Um das Buch nicht durch mehrere Kupferblätter zu vertheuren, habe ich in der Geometrie zu meinen Zusätzen mehrentheils die schon vorhandenen Figuren genutzt. Wenn der Lehrer, wie dies ohnehin geschehen muß, die zu jedem Satz gehörige Zeichnung, so weit sie jedesmal nöthig ist, selbst entwirft, und darauf hält, daß seine Schüler dieselbe gleichfalls entwerfen, so wird alle Verwirrung leicht vermieden werden können, welche sonst aus dieser bewiesenen Sparsamkeit entstehen könnte. In der Geometrie setze ich voraus, daß der Lehrer

nicht nur von der 70sten Figur, welche auf die Astronomie und Geographie vorbereitet, sondern auch von den geometrischen Körpern pappene Vorstellungen bey der Hand habe. Diese dürfen nie fehlen, wenn man nicht, wiewol ohne Schuld des Lehrbuchs, unverständlich seyn will.

Die Arithmetik wird der Jugend mehrentheils leicht zu erlernen, und sie erhält bald eine nicht geringe Fertigkeit darin, weil es gewöhnlich ist, die Sätze und Regeln derselben durch eine Menge Rechnungsbeyspiele üben, und dabey den Schüler mehr arbeiten zu lassen, als der Lehrer selbst arbeitet. Wenn man bey dem Vortrage der Geometrie sich die Mühe nehmen will, eben diese Methode des Unterrichts zu gebrauchen, so wird sich auch ein eben so guter Erfolg davon leicht zeigen, und ich hoffe, unter der Voraussetzung, daß der Lehrer einer solchen Methode des Vortrags

sich

sich zu bedienen weiß, nicht den Vorwurf, daß ich manche Zusätze zur Geometrie eingeschaltet habe, welche für die Anfänger zu schwer sind. Insonderheit ist es nothwendig, die Begriffe und Lehrsätze von den Verhältnissen und Proportionen auch in der Geometrie durchaus practisch vorzutragen, und durch viele Zeichnungsbeyspiele deutlich zu machen. Wenn man diese gehörig wählt, von einfachen Fällen zu den zusammengesetzteren fortgeht, und dadurch den Schüler anleitet, diese Lehren selbst zu erfinden und anzuwenden, so werden sie ihm bald geläufig werden. Bey dieser Methode ist es, wie bekannt, Herrn Euler leicht geworden, einen Bedienten sogar die Algebra zu lehren.

Einen vorläufigen Unterricht über den Gebrauch der Buchstaben in der Mathematik zur Bezeichnung der Größen, über den Gebrauch der Formeln zur großen Erleichterung der strengeren Beweise, verbunden mit Beyspielen zur

Ue-

Uebung in Uebersetzung solcher Formeln, welche sich in Menge aus dem vorhergehenden Vortrage entlehnen ließen, und sowol eine angenehme Wiederholung desselben, als eine wichtige Vorbereitung zum folgenden gründlicheren Vortrage nach unsern besten Compendien seyn würden, hätte ich gern noch hinzugefügt, wenn ich nicht befürchtet hätte, das Buch zu weitläuftig zu machen.

Man kann die reine Mathematik noch ungleich leichter vortragen, als es in diesem Lehrbuch geschehen ist, allein man erregt auch sicher durch die Bemühung gar zu leicht zu seyn, und die leichtesten Vorstellungsarten, die sich darbieten, zu wählen, desto mehrere Verwirrungen, wenn der Schüler auf die erhaltenen Kenntnisse weiter bauen will. Man muß den Grund sicher legen, wenn man vorhat, künftig allenfalls ein größeres Gebäude auf demselben aufzuführen, und sich nur vorerst mit einem kleineren behelfen will.

Die

Die Absicht des Herrn Verfassers bey der ersten Ausgabe dieses Lehrbuchs war gewiß nicht, einen gründlicheren euklidischen Vortrag der reinen Mathematik auf Schulen für entbehrlich zu erklären. Ich erinnere mich, nebst andern seiner Schüler noch mit der lebhaftesten Dankbarkeit des angenehmen Unterrichts, den er nicht lange vor Ausgabe dieser Schrift, als damaliger Inspector der Realschule, uns über den Euklides selbst, mit welchem er uns frühzeitig bekannt zu machen mit Recht für nothwendig hielt, ertheilte. Was ich vorhin von der Absicht meiner Arbeit an dieser Ausgabe angeführt habe, wird mich ebenfalls von dem Verdacht einer ähnlichen Absicht frey sprechen. Gleichwol zweifle ich nicht, daß auch andere Lehrer der Mathematik auf Universitäten, nebst mir, immer noch sehr zufrieden seyn werden, wenn der größte Theil ihrer Zuhörer nur so viel Kenntniß der Mathematik und Physik mitbringt, als in diesem Lehrbuche vorgetragen ist. Ich wünsche sehr, durch meine geringe

Ar-

Arbeit an der Verbesserung desselben zur Beförderung dieser Zufriedenheit etwas beygetragen zu haben.

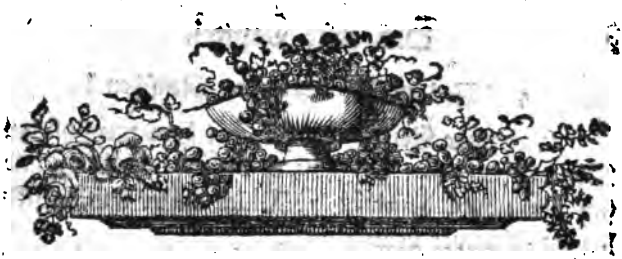
Eine Schrift, in welcher einzelne Abschnitte ausführlicher von neuem und nicht von dem Verfasser selbst, bearbeitet sind, erhält unvermeidlich neue Unvollkommenheiten, die sie vorher nicht hatte. Ich zweifle nicht, daß andere deren in der gegenwärtigen Schrift noch mehrere sehen werden, als ich nach dem Abdruck einzelner Bogen derselben schon hin und wieder bemerke, oder schon bey der Arbeit selbst nicht zu vermeiden wußte, wenn ich nicht noch weitläuftigere Veränderungen vornehmen wollte, wozu es mir bey der Beeilung des Drucks und manchen andern Geschäften, die mir mehrentheils nur Nebenstunden zu dieser Arbeit übrig gelassen haben, auch an Zeit gefehlt haben

ben würde, wenn ich auch mich dazu berechtigt gehalten hätte. Ich hoffe indessen, daß diese Unvollkommenheiten nicht wesentlich seyn, und bey künftigen Auflagen sich größtentheils verbessern lassen werden. Bey meiner Entfernung vom Druckort werde ich wegen der Druckfehler, deren diese erste Abtheilung mehrere hat, entschuldiget seyn. Diejenigen Druckfehler, welche zugleich den Sinn der Worte verändern, oder Sprachfehler sind, habe ich sorgfältig aufgesucht und am Ende angezeigt. An der zwoten Abtheilung dieses Lehrbuchs wird zu drucken fortgefahren, und sie wird bald nach Johannis erscheinen.

Schullehrer, welche sich dieses Lehrbuchs bisher bey ihrem Unterricht bedienet haben, und welche in demselben hin und wieder Verbesserungen, Erläuterungen, Zusätze u. dergl.

angebracht wünschen, ersucht die Verlagshandlung um eine geneigte schriftliche Anzeige ihres Verlangens, und verspricht, wo möglich, die Erfüllung desselben, um auf diese Art diesem nützlichen Schulbuch immer mehrere Vollkommenheit zu verschaffen. Bützow, im April, 1782.

P. J. Hecker,
Professor der Mathematik.



Das erste Capitel.

Von der Geisterwelt überhaupt und insonderheit von der Seele des Menschen.

1. Was ist die Welt?

Der ganze Inbegrif und Zusammenhang aller von Gott erschaffenen Dinge.

2. Wie kann die Welt eingetheilt werden?

In die **Geisterwelt** und **Körperwelt.**

3. Was ist die **Geisterwelt**?

Der Inbegrif aller erschaffenen Geister.

4. *Was ist ein Geist?

Ein einfaches Wesen, welches Verstand und Willen hat.

Anmerk. 1) Ein einfaches Wesen ist ein solches, welches nicht aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt ist, folglich auch nicht in die äussern Sinne fällt.

2) Die Geister sind **unsterblich** und **unverweslich.** Denn weil sie nicht aus Theilen zusammengesetzt sind, so können sie auch nicht zerstört werden, folglich nicht anders aufhören, als durch eine Vernichtung, welche Gott allein nach seiner Allmacht bewerkstelligen könnte, aber weder nach seiner Weisheit, noch nach seiner Liebe bewerkstelligen will.

5. *Was ist die Seele des Menschen?

Derjenige Geist, welcher mit dem menschlichen Leibe also vereinigt ist, daß er denselben belebt, und sich vermittelst desselben die Dinge außer ihm vorstellen und darüber denken kann.

Anmerk. 1) Das Daseyn einer solchen von dem Körper wesentlich unterschiedenen Seele in dem Menschen ist daraus erweislich, daß der Mensch nicht nur ein Leben oder ein Vermögen sich zu bewegen in sich hat, sondern auch denken kann, und sich seiner Gedanken bewußt ist, oder es weiß, daß er denkt. Eine Maschine kann Wirkungen hervorbringen, die von einem Gewichte, einer gespannten Feder u. dergl. abhängen, und in ihrer Zusammensetzung gegründet sind, z. B. eine Uhr kann auf solche Weise die Stunden anzeigen, aber sie ist sich dessen nicht bewußt. Die Lichtstrahlen fallen auf die Wand eines verfinsterten Zimmers, eben so wie in unser Auge, aber der Mensch kann sich das Bild, welches dadurch in seinem Auge hervorgebracht wird, vorstellen, darüber nachdenken, andere gehabte Bilder von abwesenden Sachen damit vergleichen, und sich selbst Vorstellungen von Dingen machen, die er nie gesehn hat. Ebendeswegen richten sich auch die Handlungen des Menschen nach den Gegenständen, die sie haben, und nach den Umständen, darin sie geschehen, welches bey den Wirkungen unbeseelter Körper nicht statt findet. Z. B. Eine Maschine, welche geht und einige Worte aussprechen kann, muß, wenn sie einmal aufgezogen worden, gerade fortgehn, wenn sie auch gleich an den Rand eines Abgrundes gestellt wird, und spricht dieselben Worte aus, wenn ihr gleich andere oder gar keine Fragen vorgelegt werden. Ueberdem ist es die wesentliche Eigenschaft eines Körpers, in seinem Zustande der Ruhe oder der Bewegung so lange zu bleiben, bis denselben eine äußere Ursach ändert; ein Mensch aber kann seinen Körper auch ohne eine vorhandene äußere Ursach nach eigenem Willkühr bewegen. Es muß also mit dem Körper des Menschen noch ein Wesen, welches nicht körperlich ist, und in der ganzen Körperwelt nicht seines gleichen hat, verbunden, und eben dieses die Seele seyn. Indessen kann das Wesen der Seele, die Vereinigung derselben mit dem Körper und die gegenseitige Wirkung von beyden in einander eben so wenig als tausend andre wirklich vorhandene Einrichtungen in der Welt von den Weltweisen erklärt werden.

2) Die Thiere haben zwar auch Seelen, indem bey ihnen Empfindungen, Begierden, ein Gedächtniß und ein Vermögen sich freywillig zu bewegen angetroffen werden; aber sie können keine allgemeine Wahrheiten erkennen, keine Vernunftschlüsse machen, keine Wissenschaften erlernen, keine eigentli-

che

che Sprache verstehn oder reden, und endlich weder eigentliche Tugenden noch eine Religion haben; welches alles Vorzüge der Seele des Menschen vor den Seelen der Thiere sind.

6. Wie können die Kräfte der menschlichen Seele eingetheilt werden?

In **obere Kräfte**, welche dem Menschen allein zukommen, oder um derentwillen die Seele des Menschen ein Geist ist, und **untere Kräfte**, welche der Mensch mit den Thieren gemein hat.

7. Welches sind die obern Kräfte der menschlichen Seele?

Der Verstand und der Wille.

8. Was ist der Verstand?

Das Vermögen, sich etwas deutlich vorzustellen, das ist, so daß man zugleich die Merkmale erkennt, wodurch die vorgestellte Sache von andern unterschieden wird.

Anmerk. Die Vernunft ist eine Fertigkeit, sich den Zusammenhang der Dinge vorzustellen, oder sie mit einander zu vergleichen und einzusehn, ob sie mit einander übereinkommen, oder von einander unterschieden sind. Den Verstand, sofern er eine Fähigkeit ist, bringen die Menschen mit auf die Welt, aber die Vernunft, sofern sie eine Fertigkeit ist, wird durch Uebung, Unterricht und Fleiß erhalten. Die Beurtheilungskraft ist das Vermögen, die Vollkommenheiten und Unvollkommenheiten der Dinge, der Witz aber das Vermögen, die Aehnlichkeiten, und die Scharfsinnigkeit dasjenige, die Verschiedenheit der Dinge einzusehn; alle drey gehören also zum Verstande, und sind nur besondere Anwendungen desselben. Eben so ist das Gewissen keine besondere Kraft unserer Seele, sondern es besteht dasselbe in dem Urtheile unsers Verstandes über die Rechtmäßigkeit oder Unrechtmäßigkeit unserer Handlungen.

9. Welches sind die Wirkungen oder Verrichtungen des Verstandes?

Die **Gedanken**. Dazu gehören 1) **Begriffe**, oder Vorstellungen von einer Sache in der Seele. 2) **Urtheile**, oder Vorstellungen der Uebereinstim-

nung oder des Widerspruchs zweyer Begriffe, welche wir mit einander vergleichen. 3) Vernunftschlüsse, oder Vorstellungen eines Urtheils aus zweyen andern.

Z. B. Ein Mensch, welcher an eine Blume, einen Baum, ein Haus, ein Bild, ein Thier, einen Menschen, eine Tugend ꝛc. denkt, macht sich einen Begrif davon. Ein Mensch, welcher denkt: die Geister sind unsterblich, vergleicht den Begrif eines Geistes mit dem Begrif der Unsterblichkeit, und stellt sich vor, daß der letztere dem erstern zukomme, und fällt also ein Urtheil. Ein Mensch, welcher denkt: alle Geister sind unsterblich; die Seele des Menschen ist ein Geist; also ist die Seele des Menschen unsterblich, leitet dieses letztere Urtheil aus den beyden erstern her, und macht also einen Vernunftschluß.

10. * Was ist der Wille?

Das Vermögen, dasjenige, was man deutlich für gut erkennt, zu begehren, und dasjenige, was man deutlich für böse erkennt, zu verabscheuen.

Anmerk. Die Freyheit ist das Vermögen, zu thun was man weiß und was man will, oder das Vermögen, nach Wissen und Willen zu handeln.

11. Welches sind die untern Kräfte der menschlichen Seele?

Das sinnliche Erkenntniß-Vermögen und das sinnliche Begehrungs-Vermögen.

12. Was ist das sinnliche Erkenntniß-Vermögen?

Das Vermögen, sich eine Sache nach dem Eindrucke vorzustellen, den sie in die Sinne macht, wobey man gemeiniglich die Merkmale nicht erkennt, wodurch sie von andern unterschieden wird, zumal wenn die Vorstellung an sich ganz einfach ist.

Z. B. Jedermann weiß, wie das Brod schmeckt, wie die rothe Farbe aussieht, wie die Vögel singen ꝛc. aber niemand kann die Merkmale anzeigen, wodurch der Geschmack des Brods von andern Speisen, die rothe Farbe von andern Farben, ein Schall von einem andern unterschieden wird, folglich erkennt man diese Dinge nur sinnlich; dahingegen begreift man mit dem Verstande, was eine Tugend sey, wenn man dieselbe an ihren Merkmalen von andern Vorzügen unterscheidet.

13. Was gehört zu dem sinnlichen Erkenntniß-Vermögen?

Die **Sinne**, die **Einbildungskraft** und das **Gedächtniß**.

14. Was ist ein Sinn?

Ein solcher Theil oder ein solches Glied des Leibes, darinn eine Sache den Eindruck machet, vermittelst dessen in unserer Seele die Vorstellung dieser Sache hervorgebracht wird.

Anmerk. Die Vorstellungen, welche wir durch die Sinne erhalten, heißen Empfindungen.

15. Wie vielerley sind die Sinne?

Zweyerley: 1) **Innere Sinne**, wodurch wir uns vorstellen, was in uns vorgehet. 2) **Aeußere Sinne**, wodurch wir uns vorstellen, was ausser uns vorgehet.

16. Wie viel äußere Sinne haben die Menschen?

Fünfe. 1) Das **Gefühl**, wodurch wir Körper empfinden, die uns unmittelbar berühren, welches mit allen Theilen unsers Leibes, sonderlich den Spitzen der Finger, geschieht. 2) Das **Gesicht**, wodurch wir das Licht empfinden, welches mit den Augen geschieht. 3) Das **Gehör**, wodurch wir den Schall empfinden, welches mit den Ohren geschieht. 4) Der **Geruch**, wodurch wir die Ausdünstungen der Körper empfinden, welches mit der Nase geschieht. 5) Der **Geschmack**, wodurch wir die Salze in den Körpern empfinden, welches mit der Zunge geschieht.

17. Was ist die Einbildungskraft?

Ein Vermögen, sich abwesende sinnliche Dinge vorzustellen.

28. Was ist das Gedächtniß?

Ein Vermögen, gehabte Vorstellungen wieder zu erneuern und sie als eben dieselben zu erkennen.

29. Was ist das sinnliche Begehrungs-Vermögen?

Ein Vermögen, das, was man sinnlich für gut erkennet, zu begehren, und das, was man sinnlich für böse erkennet, zu verabscheuen.

Anmerk. 1) Die Affecten sind heftige sinnliche Begierden, dergleichen sind Freude, Traurigkeit, Hofnung, Furcht, Dankbegierde, Neid, Neubegierde, Verwunderung, Eckel.

2) Die Temperamente sind besondere Einrichtungen der sinnlichen Begierden in einem Menschen nach der Beschaffenheit seines Körpers, dazu gehören: 1) Das cholerische Temperament, welches zur Ehrbegierde, Großmuth und Arbeitsamkeit ingleichen zum Stolz, Zorn, Grausamkeit und Verwegenheit geneigt macht. 2) Das sanguinische, welches zur Liebe, Freundlichkeit, Freygebigkeit, Aufrichtigkeit, Freude, und Mitleiden, ingleichen zur Wollust, Weichlichkeit, Furchtsamkeit, Unbeständigkeit oder Flatterhaftigkeit und Schwatzhaftigkeit geneigt macht. 3) Das melancholische, welches zur Ueberlegung, Vorsichtigkeit, Tiefsinnigkeit, Beständigkeit und Verschwiegenheit, ingleichen zur Aengstlichkeit, Argwohn, Geiz und Ausschweifung sowohl der Freude oder des Gespöttes als der Traurigkeit, oder des Hasses geneigt macht. 4) Das phlegmatische, welches zur Gleichgültigkeit, Trägheit, Nachlässigkeit, Unordnung und Tücken geneigt macht. Diese Temperamente sind bey den meisten Menschen vermischt, und können durch gute Erziehung, Unterricht, Fleiß und Uebung verbessert werden.

3) Das Lachen ist der sichtbare Ausdruck der Freude, das Weinen derjenige der Traurigkeit in dem Gesicht. Die Sprache ist die Fertigkeit, Gedanken durch Worte vorzustellen, welche entweder geredet oder geschrieben werden.

4) Der Schlaf ist der Zustand des Menschen, in welchem derselbe sich keiner wirklichen Vorstellungen von den Dingen ausser ihm bewußt ist, oder keine wirkliche äußere Empfindungen hat. Die Träume sind Einbildungen eines Schlafenden, oder Vorstellungen abwesender Dinge im Schlafe. Der Tod ist der Zustand des Menschen, in welchem die Seele derselben ganz leibe getrennt ist, und daher gar keine Vorstellungen von den Dingen außer ihr vermittelst des Leibes bekommen kann.

20. Welches sind die Vorzüge der Seele?

Die **Erkenntniß** des Wahren in Ansehung des Verstandes, und die **Tugend** in Ansehung des Willens.

21. Was ist die Erkenntniß?

Ein Inbegrif von Vorstellungen in der Seele.

22. Welches sind die Gründe unserer Erkenntniß?

1) Die **Erfahrung**, oder die eigene Empfindung wirklicher Dinge. 2) Der **Glaube**, oder die Annehmung eines Zeugnisses, das ist der Versicherung eines andern von seinen gehabten Empfindungen. 3) Die **Wissenschaft**, oder die Einsicht in das Wesen und die Natur der Dinge.

Z. B. Wir wissen durch Erfahrung, daß die Sonne leuchtet und wärmet; durch Glauben, daß eine Sündfluth gewesen sey; durch Wissenschaft, daß zwey mal zwey vier sey.

23. Welches sind die Mittel zur Erkenntniß zu gelangen?

Der **Gebrauch der Sinne** und der **Vernunft**.

Anmerk. Diese beyden Mittel erfordern wieder theils eigne Untersuchungen der Dinge, davon wir eine Erkenntniß erlangen wollen, theils mündlichen und schriftlichen Unterricht durch Lehrer und Bücher. Der mündliche Unterricht wird in teutschen und lateinischen Schulen, Realschulen, Gymnasien, Universitäten und in Kirchen, von Schulmeistern, Præceptoren, Professoren und Predigern gegeben.

24. Welches sind die Vollkommenheiten unserer Erkenntniß?

1) Die **Weitläuftigkeit**, wenn wir viele Dinge erkennen. 2) Die **Wichtigkeit** und **Grösse**, wenn wir wichtige und erhebliche Dinge wissen. 3) Die **Richtigkeit** und **Wahrheit**, wenn unsere Erkenntniß mit den Dingen, die wir erkennen, wirklich übereinstimmt. 4) Die **Deutlichkeit**, wenn wir die

verschiedenen Dinge, die wir erkennen, an ihren Merkmalen zu unterscheiden wissen. 5) Die **Gewißheit**, wenn wir es uns bewußt sind, daß unsere Erkenntniß wahr sey. 6) Die **Gründlichkeit**, wenn wir die erkannte Sache aus ihren ersten Quellen herzuleiten im Stande sind, und in ihrem ganzen Zusammenhange übersehn, woraus hernach im Vortrage die **Genauigkeit** entstehet. 7) Das **Leben der Erkenntniß**, oder daß sie practisch sey, wenn sie unsern Willen bewegt, nach derselben zu handeln.

Anmerk. Die Unwissenheit ist der Mangel der Erkenntniß. Das Vorurtheil ist ein Urtheil, welches wir ohne gehörige Untersuchung für wahr halten. Der Irrthum ist die Abweichung unsrer Erkenntniß von der Beschaffenheit der Dinge, die wir erkennen. Die Meinung ist eine ungewisse Erkenntniß, welche wir für wahr annehmen; dieselbe ist wahrscheinlich, wenn wir wichtigere Gründe haben, sie für wahr als für falsch zu halten. Ein jeder Grund, um dessentwillen wir eine Erkenntniß nicht für wahr oder wenigstens nur für wahrscheinlich halten, heißet ein Zweifel. Eine jede Vorstellung, welche wahr ist, wird selbst eine Wahrheit genannt.

25. Welches sind die Hindernisse der Erkenntniß der Wahrheit?

1) Das **Ansehn**, wenn man andern, die man für klug hält, ohne Prüfung alles glaubt, was sie sagen. 2) Die **Einbildung**, wenn man sich selbst für sehr klug hält. 3) Die **Affecten**, wenn man für wahr hält, wovon man wünscht, daß es wahr sey, und für falsch, wovon man wünscht, daß es falsch sey. 4) Die **Trägheit**, wenn man um die Erlangung der Erkenntniß sich nicht bemühn, oder dieselbe nicht recht untersuchen will. 5) Die **Verwirrung**, wenn man eine Vorstellung mit einer andern verwechselt. 6) Der **Zwang**, wenn man unter mehrern Meynungen eine annehmen muß.

26. Was ist die Gelehrsamkeit?

Ein Inbegrif vieler, nützlicher, nicht gemeiner, (das ist, nicht unmittelbar in die Sinne fallender) und zusammenhangender Wahrheiten.

Anmerk. 1) Ein Gelehrter ist derjenige, welcher dergleichen Wahrheiten wirklich erkennt, folglich eine Einsicht vieler nützlicher nicht gemeiner und zusammenhangender Wahrheiten hat.

2) Eine Kunst ist eine Fertigkeit, Wahrheiten der Gelehrsamkeit zur Verfertigung solcher Werke, die zur Nothdurft, Bequemlichkeit und Vergnügen der Menschen gebraucht werden, anzuwenden. Die Handwerke sind Fertigkeiten, eben solche Werke aus Körpern, ohne eine besondere Kenntniß oder Anwendung der Wahrheiten der Gelehrsamkeit zu verfertigen.

27. Welches sind die verschiedenen Theile der Gelehrsamkeit?

1) Die **Sprachkunde**, oder die Lehre von den Sprachen, dazu insonderheit die Lehre von den todten und ausländischen Sprachen, z. B. der hebräischen, darin das alte, und der griechischen, darin das neue Testament ursprünglich geschrieben ist, ferner der lateinischen, welche die alten Römer redeten, der italiänischen, französischen, englischen Sprache ꝛc. ingleichen die **Redekunst** und **Dichtkunst** gehören.

2) Die **historischen Wissenschaften**, dazu 1) die **eigentliche Historie** oder Nachricht von geschehenen Begebenheiten in der bürgerlichen Gesellschaft der Menschen, der Kirche, unter den Gelehrten, oder Künstlern und in der Natur, 2) die **Geographie** oder Nachricht von den Ländern des Erdbodens und den Einwohnern derselben gehören.

3) Die **eigentlichen Wissenschaften**. Diese sind: 1) Die **Philosophie** oder **Weltweisheit**, das ist die Wissenschaft von den Eigenschaften der Dinge in sofern wir dieselben blos durch die Vernunft erkennen, dazu die **Physik** oder **Naturlehre**,

welche von den Eigenschaften der Körper handelt, gehört. 2) Die **Mathematik** oder **Meßkunst**, das ist die Wissenschaft von den Größen der Dinge, dazu wieder verschiedene besondere Wissenschaften, als die **Arithmetik**, **Geometrie** und **Astronomie** gehören. 3) Die **Theologie** oder **Gottesgelahrheit**, das ist die Wissenschaft von den von Gott in der heiligen Schrift geoffenbarten Wahrheiten, dazu insonderheit die **Glaubenslehre** und **Sittenlehre** oder **Moral** gehören. 4) Die **Jurisprudenz** oder **Rechtsgelahrheit**, welche von den Rechten und Gesetzen in der bürgerlichen Gesellschaft handelt. 5) Die **Medicin** oder **Arzeneygelahrheit**, welche von der Erhaltung und Wiederherstellung der Gesundheit des Menschen handelt.

Anmerk. 1) Die vornehmsten mechanischen Künste sind: Die Musik, der Feldbau, die Gärtnerey, die Jandlung, die Apothekerkunst, die Chirurgie oder Wundarzney, Barbier- und Baderkunst, die Buchdruckerkunst, die Mahler- und Bildhauerkunst, die Gold- und Silberarbeiterkunst, die Uhrmacherkunst, die Orgelbauerkunst, die Kriegskunst.

2) Die Handwerker suchen aus rohen Materialien durch Handarbeit Werke hervorzubringen, welche zur Nothdurft, Bequemlichkeit und Vergnügen des Menschen gereichen. Diese erfordern 1) Speise und Tranck, damit beschäftigen sich der Müller, Becker, Brauer, Fleischer, Koch. 2) Kleidung, dazu den Stoff der Leinweber, Tuch- und Zeugmacher, Seidenwürker, Färber, Loh- und Weißgerber: die Kleidung selbst aber, und zwar für den Kopf der Hutmacher, Mützenmacher, Perückenmacher, für den Leib der Schneider, Posamentirer, Knopfmacher, Kürschner; für die Hände der Handschuhmacher; für die Füße der Strumpfwirker und Schuster verfertigen. 3) Wohnung, welche der Maurer, Zimmermann, Ziegel- und Schieferdecker aufführen. 4) Hausrath, welchen aus natürlichen Körpern, und zwar aus Thon, der Töpfer; aus Metall, der Goldschmidt, Zinngießer, Eisenschmidt, Schlösser; Messerschmidt, Klempner, Nadler, Gürtler, Drathzieher, Gieser; aus Holz, der Tischler, Drechsler, Stell- und Rademacher, Böttcher, Stuhlmacher, Korbmacher; aus Horn, der Kammmacher; oder aus künstlichen Materien, und zwar aus Glas, der Glaser und Spiegelmacher; aus Leder, der Riemer,

mer, Sattler und Täschner; aus Hanf und Flachs, der Seiler; aus Papier, welches der Papiermüller liefert, der Buchbinder; aus Talg und Fett, der Seifensieder und Lichtzieher verfertigen. Die meisten Handwerke haben ihre Zünfte, Innungen und Handwerks-Ordnungen, nach deren Verfassung einer, der sie lernen will, eine gewisse Zeit Lehrjunge seyn muß, hernach Geselle, und, wenn er als ein solcher gewandert hat, Meister wird.

2) Die Taglöhner ernähren sich von schlechter Handarbeit, als Holzhauen, Steinbrechen, Gräben, Dreschen u. dergl.

28. *Was ist die Tugend?

Eine Fertigkeit, seine freyen Handlungen nach den Gesetzen der Natur einzurichten.

Anmerk. 1) Das Laster ist das Gegentheil davon, oder die Fertigkeit, seine Handlungen wider die Gesetze der Natur einzurichten.

2) Die Gesetze der Natur sind die Vorschriften unserer freyen Handlungen, welche uns die gesunde Vernunft lehrt, z. B. daß wir uns und andere so vollkommen zu machen bemühet seyn sollen, als es uns möglich ist, daß wir die Dinge, die wir besitzen, dazu gebrauchen, wozu sie bestimmt sind, daß wir einem jeden das seine lassen, niemand beleidigen, die Wahrheit reden, und die mit andern gemachten Verträge erfüllen sollen.

3) Die Gesetze der Natur können von den Menschen nach dem Fall zwar erkannt, aber nicht vollkommen erfüllt werden, daher uns Gott dieselben in der heiligen Schrift nicht nur aufs neue gelehrt und eingeschärft, sondern auch die Mittel bekannt gemacht hat, durch deren rechten Gebrauch wir wieder in den Stand gesetzt werden können, wahrhaftig tugendhaft zu leben. In der christlichen Lehre ist ein kurzer Auszug dieser Vorschriften unsers rechtmäßigen Verhaltens anzutreffen; daher hier nur von drey besondern Gattungen unsrer natürlichen Pflichten, nemlich von dem Verhalten in Ansehung der Gesundheit des Leibes, von den Sitten und von der Klugheit im gesellschaftlichen Leben gehandelt werden soll.

29. Welches sind die vornehmsten Gesundheitsregeln?

Ueberhaupt hat man sich vor allen heftigen Gemüthsbewegungen, als Sorge, Gram, Schrecken, Argwohn, Zorn, Geitz, Wollust und vor aller Ausübung sündlicher Lüste zu hüten, hingegen sein Gemüth

in Ruhe und Zufriedenheit, wozu der Friede mit Gott, oder das Bewußtseyn unsers Antheils an der Gnade Gottes das einzige wahre Mittel ist, zu erhalten, sich ein erlaubtes Vergnügen bisweilen zu machen, im Essen und Trinken mäßig zu seyn und fleißig zu arbeiten. Insonderheit sind folgende Regeln zu bemerken:

I. In Ansehung der Wohnung und des Aufenthalts.

1) Man halte sich nicht auf in wüsten, zu niedrig liegenden, sumpfigten, eingeschlossenen und solchen Orten, wo die Luft mit vielen unreinen Dünsten angefüllt ist, sondern wohne in einer Gegend, wo freye und reine Luft, und, wo möglich, fließendes Wasser ist, suche daher, wenn man in einer solchen Gegend, wo stehendes und faulendes Wasser ist, wohnen muß, solches durch gezogene Gräben und andere Mittel wegzuschaffen, und dafür Aecker und Gärten anzulegen.

2) Man schlafe nicht in gar zu niedrigen und feuchten Stuben, sonderlich wenn sie lange verschlossen gewesen, oder erst ausgeweißt oder bemahlt worden, oder worin eine gar zu große Wärme, oder Kohlendampf ist, oder viele starkriechende Blumen sind, sondern in trockenen, luftigen und kalten Kammern.

3) Man öfne die Thüren und Fenster der Wohnzimmer öfters: sonderlich des Morgens, damit frische Luft hineinkomme, hüte sich dabey aber vor der Zugluft.

4) Man gehe niemals aus einem kalten Orte plötzlich in einen warmen, oder aus einem warmen Orte in einen kalten, sondern verweile sich einige Zeit in einem gemäßigten Orte, z. B. wenn

man

man im Winter aus der Kälte nach Hause kommt: so bleibe man einige Zeit vor der Stube, oder stelle sich in der Stube, wenn sie sehr warm ist, wenigstens ans Fenster, aber durchaus nicht sogleich an den heißen Ofen. Man hüte sich auch insonderheit sehr, die Füße oder Hände, wenn sie kalt geworden, am Ofen oder Kohlfeuer plötzlich zu erwärmen.

5) Man halte sein Zimmer, Haus, Hofraum und die Strassen allezeit reinlich.

II. In Ansehung der Kleidung.

1) Man bediene sich solcher Kleider, welche den Leib gehörig decken und für Kälte und Nässe beschützen, aber nicht zu enge sind oder drucken, sonderlich binde man die Halsbinde und Kniebänder nie zu dichte.

2) Man halte sonderlich den Kopf und die Füße warm und trocken, aber gewöhne sich nicht zu weichlich in Ansehung der Kälte, und hüte sich vornemlich sehr vor vielem Pelzwerk.

3) Man entkleide sich nicht, wenn man warm ist, und hüte sich sehr dafür, daß der Schweiß nicht plötzlich erkälte und zurücktrete.

4) Man ziehe keine alte Kleider an, welche von Leuten getragen sind, die ansteckende Krankheiten haben, oder gehabt haben.

III. In Ansehung der Speise und des Trankes.

1) Man esse und trinke, wenn es die Berufsgeschäfte zulassen, zu gewissen festgesetzten Zeiten, und zwar nur zweymal, oder wenigstens nicht über dreymal des Tages.

2) Man

4) Man lege sich im Bette mit dem Kopfe etwas hoch, mit dem Leibe aber gerade ausgestreckt, und liege nicht viel auf dem Rücken, sondern lieber auf der Seite.

5) Man hüte sich im Sommer sehr vor Erkältungen in der Nacht, und sitze oder gehe auch des Abends nicht lange Zeit in der freyen Luft, sonderlich im Herbste.

V. In Ansehung der Krankheiten.

1) Man hüte sich vor vielen Arzeneyen, gewöhne sich auch nicht daran, und wenn man sie im Nothfall nehmen muß, so nehme man sie nur von solchen, welche die Arzneykunst gründlich verstehen, und hüte sich sorgfältig, ohne Rath und Vorwissen eines erfahrnen Arztes sogenannte Hausmittel zu gebrauchen, die zwar zuweilen die Krankheit heben, aber dagegen zugleich oft als ein heimliches Gift wirken und tödliche Krankheiten zur Folge haben.

2) Man hüte sich, wenn man krank ist, vor Erkältungen, vor gar zu großer Wärme, vor vielen und harten Speisen, vor starkem Getränke, und vor allen Affecten.

3) Man gehe niemals zu nahe zu solchen, welche hitzige, faule, und überhaupt zu solchen, welche ansteckende Krankheiten haben, und setze sich nicht so, daß man ihre Ausdünstungen in sich ziehe, schlucke auch den Speichel nicht nieder, sondern werfe ihn aus, und spüle den Mund oft mit Weinessig oder Wasser aus, und bediene sich des säuerlichen Getränks, des Rhabarbers, der Wacholderbeeren oder der Raute.

30. *Welches sind die vornehmsten Sittenregeln?

Ueberhaupt hat man sich in seinem ganzen äußerlichen willkührlichen Betragen eines vernünftigen Wohlstandes zu befleißigen, und sich nach dem zu richten, was durch gute Gewohnheiten in dem Lande, darin man sich befindet, eingeführt worden, damit man allen Anstoß bey wohlerzogenen Leuten vermeide, und sich denen, mit welchen man umgeht, selbst durch das, was sie beym ersten Anblick an uns wahrnehmen, gefällig mache; wobey man aber zugleich alles gezwungene und sonderliche Wesen zu vermeiden hat. Insonderheit sind folgende Regeln zu beobachten:

I. In Ansehung der Stellung des Leibes.

1) Man gewöhne sich den Kopf aus den Schultern herauszustecken und gerade zu halten, die Brust vorwärts, den Bauch einwärts zu halten, und vermeide sowohl alle seltsame Verziehungen und Runzeln des Gesichts, als unnütze Bewegungen der Augen, Hände und Füße.

2) Im Gehen setze man die Füße auswärts, mache ordentliche Schritte, die weder zu groß noch zu klein sind, wanke nicht mit dem Leibe hin und her, stolpere und hüpfe nicht.

3) Im Stehen halte man den ganzen Leib grade, die Knie steif, lasse die Hände ganz herunter hängen, und setze die Füße vorwärts auseinander.

4) Im Sitzen lege man die Knie nicht über einander, schlage die Füße auch nicht über einander, sondern setze sie gehörig zusammen, ohne damit zu scharren oder zu baumeln, lege den Kopf nicht in die Hände, oder die Arme auf einen Tisch.

II. In Ansehung der Kleidung.

1) Man ziehe sich des Morgens, nachdem man sich mit kaltem Wasser gewaschen und ordentlich gekämmt hat, gleich ganz an, aber nicht in Gegenwart anderer Leute, und entblöße sich nicht vor andern.

2) Man kleide sich so, daß man durch seine Tracht kein Aufsehn mache, folglich nach seinem Stande, und nach der eingeführten Mode, mache aber nicht gleich jede neue Mode mit.

3) Man halte seine Kleider und Wäsche reinlich, und lasse sie, wenn sie zerrissen, bald bessern.

4) Man binde die Strümpfe auf, setze den Hut grade, und nicht zu weit aus den Augen, knöpfe die Kleider ordentlich zu, und sehe darauf, daß alle Kleidungsstücke gehörig sitzen.

III. In Ansehung des Essens.

1) Man stelle sich beym Tischgebet in die Gegend, wo man sitzen wird, oder bleibe beym Hereingehen in das Eßzimmer bey der Thüre stehn, warte hernach, bis sich die Vornehmern gesetzt haben, und setze sich alsdenn an dem angewiesenen Orte ohne Geräusch nieder.

2) Messer und Gabel müssen zur Rechten, das Brod zur Linken, der Löffel hinter und die Serviette auf den Teller gelegt seyn.

3) Man fahre nicht zuerst und begierig in die Schüssel, sondern warte, bis andere daraus genommen haben oder vorgelegt wird.

4) Man fasse den Löffel oder Messer und Gabel nicht mit der ganzen Hand, sondern nur mit drey Fingern.

5) Man schneide vom Fleisch oder Brod jedesmal nur so viel ab, als man auf einmal in

den

den Mund bringen will, mache aber die Bissen nicht zu groß, und esse nicht zu schnell.

6) Die Finger müssen das Essen so wenig als möglich berühren; daher man das, was man halten will, mit der Gabel fassen, und was getheilt werden soll, mit dem Messer zerschneiden muß; noch weniger darf man die Bissen mit den Zähnen abreissen, oder an den Knochen nach Art der Hunde nagen.

7) Wenn von dem Essen ohngefehr etwas an die Finger gekommen seyn sollte: so darf man diese weder an den Kleidern abwischen, noch gar ablecken, auch darf man den Mund nicht mit der Hand abwischen, sondern beydes muß mit der Serviette geschehn. Man hüte sich jedoch, die Serviette zu sehr und ohne Noth zu verunreinigen.

8) Man zerkäue die Speisen mit verschlossenen Lippen und ohne Schmatzen, bringe auch die Zunge nicht aus dem Munde hervor, schlucke die Bissen nicht begierig nieder, lege sich mit dem Kopfe nicht über den Teller, und fahre mit den Händen nicht ohne Noth über den Tisch her.

9) Die Knochen, Fischgräten, und was sonst von den Speisen nicht gegessen werden kann, lege man auf den Rand des Tellers.

10) Man bringe nichts wieder in die Schüssel, was man einmal auf seinem Teller, und keinen Bissen wieder auf den Teller, den man schon einmal im Munde gehabt hat, und hüte sich sehr, zu eckelhaft oder zu delicat zu thun.

11) Man trinke nicht eher, bis die Vornehmern, und, wenn man bey fremden Leuten speiset, bis der Wirth getrunken hat, und trinke zuerst des

Wirths und hernach der übrigen Gäste Gesundheit, wenn es da, wo man isset, Gebrauch ist.

12) Man hüte sich sehr ein Glas umzustossen, oder andere mit seinem Essen zu besudeln.

13) Man halte die Serviette vors Gesicht, und wende dasselbe vom Tisch weg, wenn man gezwungen ist, zu husten, auszuspeyen, sich zu schneutzen, die Zähne zu reinigen, und dergl. enthalte sich aber aller dieser Dinge so viel nur möglich über Tische; noch weniger darf man ohne Noth aufstehn und vom Tische weglaufen, ehe alle aufgestanden sind und gebetet ist, es sey denn, daß man dazu Erlaubniß oder Befehl erhalte.

IV. In Ansehung des Umganges mit andern.

1) Man biete seinen guten Bekannten, denen man begegnet, nach Verschiedenheit der Tageszeit, einen guten Morgen, guten Tag, guten Abend, gute Nacht; bey Vornehmen aber darf man nur eine tiefe Verbeugung machen, dabey man jedoch weder sich zu geschwind niederbücken noch mit dem Fuß auskratzen muß. Ist es auf der Straße, so muß man schon in einiger Entfernung den Hut abnehmen, und denselben so lange in der rechten Hand niederhalten, bis der Vornehme vorübergegangen ist.

2) Wenn man mit einem Vornehmern auf der Straße gehet, so lasse man denselben zur rechten Hand gehen; sind ihrer mehrere, so bleibt der Vornehmste in der Mitten, die geringern gehören auf die Flügel, oder gehen hinter den Vornehmern her.

3) Wenn

3) Wenn man bey einem Vornehmen ins Haus geht, so muß man sich vorher nach seinem rechten Titel erkundigen, hierauf läßt man sich durch den Bedienten bey ihm melden, oder klopft bescheiden an sein Wohnzimmer, nachdem man vorher den Hut abgenommen, und den Stock an die Seite gesetzt hat. Auf erhaltenen Befehl hereinzukommen, tritt man ins Zimmer, macht die Thür desselben ohne Geräusch, und ohne sich ganz umzudrehen, hinter sich zu, macht eine tiefe Verbeugung, und bleibt bey der Thüre stehn, oder geht nur einige Schritte auf ihn zu, da man sich denn nochmahls beugen muß. Ist man nun von ihm bestellt worden, so frägt man, wofern er nicht selbst gleich zu reden anfänget, was zu seinen Befehlen sey; hat man aber selbst eine Sache bey ihm anzubringen, so bittet man um die Gnade oder Gütigkeit einen anzuhören, und trägt alsdenn seine Sache kurz und deutlich vor. Hierauf hört man aufmerksam zu, was er sagt, und antwortet geschwinde und höflich, aber ohne Weitläuftigkeit, auf die vorgelegten Fragen. Soll man sich niedersetzen, so thut man es ohne übertriebene Weigerung an dem angewiesenen Orte. Sobald man mit seiner Sache fertig ist, oder der Vornehmere nichts mehr frägt, steht man auf, setzt seinen Stuhl zurück, empfiehlt und entfernt sich mit gehörigen Verbeugungen.

4) Wenn ein Vornehmer zu uns kommt, so empfange man ihn sogleich vor der Thüre, lasse denselben vor sich hereingehen, setze ihm einen Stuhl hin und nöthige ihn zu sitzen, welches letztere jedoch bey großen Herren, wenn sie zu uns kom-

men, nicht geschehn darf, denen man nur einen Stuhl hinsetzt.

5) Gegen Fremde muß man besonders höflich seyn, sie willig zu rechte weisen, und ihnen, worin man kann, gerne dienen.

6) Wenn man an einem Orte ist, wo Vornehmere sind, die da stehn: so muß man auch so lange stehn bleiben, bis sie sich setzen, und es uns befehlen, auch zu sitzen: ingleichen hüte man sich, ihnen den Rücken zuzuwenden, sonderlich wenn sie mit uns reden.

7) Man gewöhne sich nicht an, in Gegenwart anderer öfters auszuspeyen, zu schnauben, zu räuspern, zu husten, sich auszurecken, überlaut zu lachen, u. dergl.

8) Man rede frey und mit Anstande, wenn man befragt oder zu reden aufgefordert wird. Man hüte sich vor Blödigkeit, aber noch mehr vor Dummdreistigkeit und Frechheit.

9) In der Kirche sitze oder stehe man ehrbar, und gaffe nicht viel umher, man neige sich, wenn der Name Jesu genannt wird, wo es gewöhnlich ist, und stehe auf, wenn der Text verlesen oder der Segen gesprochen wird; denn eine kleine Bequemlichkeit ist nie verachtungswürdiger, als wenn man um derselben willen von einem solchen durch eine alte Gewohnheit eingeführten guten Gebrauch eine Ausnahme machen will.

31. Welches sind die vornehmsten Klugheitsregeln?

Ueberhaupt suche man sich selbst, seine Pflichten und die Verbindungen, darin man steht, immermehr kennen zu lernen, bemühe sich so zu leben, wie man es Gott, seinem Nächsten und sich selbst schuldig ist, setze

sich in allen seinen Verrichtungen die besten Absichten vor, und wende die besten Mittel an, sie zu erreichen. Insonderheit sind in Ansehung des gesellschaftlichen Lebens folgende Regeln zu beobachten:

1) Man verlasse sich nie auf andere Menschen, noch auf seinen eigenen Verstand, sondern allein auf den versöhnten Gott im Himmel.

2) Man sey niemanden ohne Noth etwas schuldig, sondern bezahle alles sobald als möglich, und hüte sich, so viel man nur kann, Wohlthaten, die man nicht verdient hat, anzunehmen. Geben ist seliger, denn Nehmen. Ap. Gesch. 20, 35.

3) Man befleißige sich der Artigkeit und einnehmender Sitten, sey gegen jedermann höflich, freundlich und dienstfertig, und sey versichert, daß jeder Mensch, er mag so geringe seyn als er wolle, uns bey künftigen Gelegenheiten einmal wieder nutzen oder schaden könne. Man hüte sich aber, die Höflichkeit und Artigkeit blos in Worten und dem äußern Betragen zu setzen, ohne daß die innere Gesinnung daran Theil hat, welches eine schändliche Heucheley ist.

4) Man hüte sich gegen ehrliche Leute mißtrauisch und argwöhnisch zu seyn, glaube auch nicht alles Böse, was von andern geredet wird; aber man traue denen nicht zu viel, die man nicht recht kennt, und offenbare seine Heimlichkeiten nie ohne Noth. Von einem Menschen, der keine Religion hat, oder leichtsinnige Grundsätze äußert, sey man versichert, daß er auch kein Gewissen und keine wahre Tugend haben könne, aber man verachte oder verfolge nie einen andern um deswillen, weil er Gott auf eine andere Art als wir dient.

5) Man heuchle nie gegen andere, sondern rede die Wahrheit, oder schweige lieber gar stille, wenn man sie nicht sagen darf, behelfe sich auch nie mit so genannten Nothlügen, wodurch man andere gegen sich mißtrauisch macht.

6) Man suche die Freundschaft und Zuneigung derer, mit welchen man in Verbindung steht, insonderheit suche man sich bey denen, unter welchen man steht, beliebt zu machen, ohne ihnen zu schmeicheln, und verpflichte sich diejenigen, über welche man zu sagen hat, ohne sich über sie stolz zu erheben.

7) Man hüte sich sehr dafür von andern zu urtheilen, sonderlich wenn unbekannte Leute dabey sind, und rede überhaupt nicht viel von anderer Leute Fehlern, auch nicht zu viel von sich selbst. Es ist nichts schwerer, als über sich und andere ein richtiges Urtheil zu fällen.

8) Man lasse sich insonderheit nicht in Beurtheilung der Obrigkeit und seiner Vorgesetzten ein, und rede niemals etwas unanständiges von ihnen, selbst alsdenn nicht, wenn sie in der That etwas versehn zu haben scheinen.

9) Man halte sehr auf seinen ehrlichen Namen, und vermeide so viel als möglich selbst allen Schein des Bösen.

10) Man rühme sich selbst nicht, und entdecke seine Fehler nicht jedermann.

11) Man arbeite fleißig, sey treu und eifrig in seinem Beruf, ohne sich in Dinge zu mischen, die uns nicht angehen, und fliehe Müssiggang und böse Gesellschaft.

12) Man halte in allen seinen Geschäften eine gute und beständige Ordnung, thue alles zu rechter

Zeit,

Zeit, und lege alle seine Sachen an ihren bestimmten Ort.

13) Man setze sich nichts vor, was man nicht ausführen kann, aber was man sich einmal pflichtmäßig vorgesetzt hat, das suche man auch mit allem Ernst auszurichten.

14) Man hüte sich vor Gefahren, die vermieden werden können, aber man scheue sich nicht vor denen, welchen man nicht entgehn kann.

15) Man gebe genau darauf acht, zu welchen Lastern man von Natur am geneigtesten ist, und suche alle Gelegenheit zur Ausübung derselben aufs sorgfältigste zu vermeiden; insonderheit hüte man sich sehr vor jeder Art solcher Vergnügungen, die man entweder gar nicht oder nicht ohne viele schwere Einschränkungen genießen darf, um sich vor der Begierde zu bewahren, sie alle oder sie immer haben zu wollen.

16) Man hüte sich vor Zank und Streitigkeiten, und vertheidige seine Rechte nur alsdenn, wenn es unumgänglich nöthig ist, aber allemal ohne Eigensinn, Hartnäckigkeit, Zorn und Selbstrache; man bleibe auch nicht dabey stehen, wenn andere mit einander zanken, und mische sich noch weniger in ihre Händel. Insonderheit lasse man sich nicht durch die in der Welt größtentheils herrschende Grundsätze von Ehre hinreissen, und sein Verhalten dadurch bestimmen. Die wahre Ehre entsteht aus einer gewissenhaften Befolgung der göttlichen Vorschriften und der Nachahmung des Beyspiels Christi. Hiedurch gewinnt man am sichersten Jedermanns, auch der lasterhaften, geheime Hochachtung.

17) Man hüte sich, in Gesellschaften einen Lustigmacher abzugeben. Die vernünftigen Leute verachten einen solchen in ihrem Herzen, wenn sie auch gleich seine Einfälle mit Vergnügen anhören.

18) Man nehme auch in Gesellschaften die Gelegenheit wahr, etwas nützliches zu lernen, und spreche daher gern, wenn es sonst die Klugheit erlaubt, mit jedem von demjenigen, womit er sich in seinem Amt oder Gewerbe beschäftiget. Die Spiele gehören größtentheils nur für Kinder; wenn man daher dazu von alten Leuten aufgefordert werden sollte, so antworte man ihnen, daß man wichtigere Geschäfte habe, welche keine Zeit übrig lassen, die Beschäftigungen der Kinder wieder vorzunehmen.

19) Man vermeide allen vertrauten Umgang mit bösen Leuten, auch mit solchen, die nur verdächtig sind, man suche auch nicht ohne wichtige Ursachen mit solchen, die von vornehmern Stande sind, als man selbst ist, Freundschaft zu machen; sondern bleibe bey seines gleichen, suche unter diesen immer einige recht gute Freunde zu haben, halte diese sehr hoch und vermeide alle Gelegenheit, ihre Liebe zu verlieren, oder zu vermindern. Ueberhaupt aber befolge man in seinem Verhalten gegen andere allemal die Vorschrift Christi: Was ihr wollet, das euch die Leute thun sollen, das thut ihr ihnen auch. Matth. 7, 12.

20) Man verändere seinen Stand und seine Lebensart nicht ohne Noth, sondern nähre sich ehrlich in den Umständen, in welche man von der Vorsehung einmal gesetzt worden.

21) Man

21) Man verwende sein Geld nicht auf unnütze Kleiderpracht, delicates Essen und überflüßigen Hausrath, sondern lieber an seine Nahrung und liegende Gründe; man suche sich immer einen Zehr- Ehren- und Noth-Pfennig zu halten, aber man hüte sich sehr vor dem Geitz, welcher eine Wurzel alles Uebels ist, und bilde sich niemals ein, daß großer Reichthum an sich allein glückliche Leute machen könne.

22) Ueber Sachen von Wichtigkeit, die man kauft oder ausleiht, oder sonst bezahlt, lasse man sich richtige Kaufbriefe, Obligationen, Inventarien, Quitungen, u. dergl. und überhaupt das, was mündlich zugesagt wird, wenn es nöthig ist, auch schriftlich geben, ingleichen nehme man gehörige Zeugen in dergleichen Vorfällen.

23) Auf Reisen und an fremden Orten handle man insonderheit vorsichtig und traue nicht jedermann: man hüte sich, Geld und Kostbarkeiten zu zeigen, und suche allenthalben, vornemlich an unbekannten Oertern, wo möglich, in denen Wirthshäusern zu übernachten, die am meisten besucht werden.

Anmerk. Man lese die Sprüche Salomons, und das Buch des Jesus Sirach.

Das

Das zweyte Capitel.

Von der Körperwelt überhaupt, und insonderheit von den Eigenschaften der Körper, oder der Naturlehre.

1. Was ist die Körperwelt?

Der Inbegrif aller wirklich vorhandenen Körper.

2. *Was ist ein Körper?

Ein aus Theilen, welche vor sich bestehen, und einen Raum einnehmen, zusammengesetztes Wesen.

Anmerk. Dasjenige, woraus die Körper zusammengesetzt sind, wird die Materie, die Menge derselben aber die Masse des Körpers genannt.

3. Was ist bey einem jeden Körper insonderheit zu betrachten?

1) **Die Beschaffenheit** oder die **Eigenschaften**, 2) die **Gröſſe** desselben, und seiner Eigenschaften.

Anmerk. Die Beschaffenheit der Körper und die Ursachen der Erscheinungen, welche sich bey ihnen ereignen, wird in der Physik oder Naturlehre untersuchet, daraus hier ein kurzer Auszug folgt. Die Gröſſe und die Ausmessung derselben ist der Vorwurf der Mathematik, davon die drey folgenden Capitel handeln.

4. Wie können die Eigenschaften der Körper eingetheilet werden?

In **allgemeine**, welche allen Körpern zukommen, und **besondere**, welche besondern Arten von Körpern oder einzelnen Körpern zukommen.

Anmerk. In der Naturlehre werden gemeiniglich nur diejenigen besondern Eigenschaften untersucht, welche dem Feuer, der Luft, und dem Wasser zukommen, dazu noch das Licht, die Electricität, der Magnet und die Luft-Erscheinungen gerechnet werden. Die Beschaffenheit der übrigen auf der

der Erde befindlichen Körper wird in der Naturhistorie gelehret, welche in dem sechsten Capitel kürzlich vorgetragen werden soll.

Die allgemeinen Eigenschaften der Körper.

5. Welches sind die wesentlichen allgemeinen Eigenschaften der Körper?

1) Die **Ausdehnung**, nach welcher ein jeder Körper einen gewissen Raum einnimmt.

Anmerk. Der Raum, darin sich ein Körper wirklich befindet, wird der Ort des Körpers genannt.

2) Die **Undurchdringlichkeit**, nach welcher ein jeder Körper seinen eigenen Raum einnimmt, so daß kein andrer Körper zugleich in demselben Raum seyn kann.

Anmerk. Es können zwar flüssige Körper, z. B. Wasser und Wein, geschmolzene Metalle u. dergl. sehr genau mit einander vermischt werden, indessen behält doch bey einer solchen Vermischung jedes Theilchen seinen eigenen Raum, daher in einem Gefäße darin z. B. Wasser und Wein vermischt sind, kein Theilchen Wasser da seyn kann, wo ein Theilchen Wein ist, sondern beyderley Theilchen liegen in besondern Räumen neben und über einander.

3) Die **Beweglichkeit**, nach welcher ein Körper seinen Ort verändern kann.

Anmerk. Alle Veränderungen, welche mit einem Körper vorgehn können, geschehn durch Bewegung entweder des ganzen Körpers oder seiner Theile, von welcher in der Mathematik weitläuftiger gehandelt wird.

4) Die **Theilbarkeit**, nach welcher die Theile, daraus ein Körper besteht, von einander wirklich abgesondert, oder jeder derselben in einen andern Raum gebracht werden kann.

Anmerk. Die wirkliche Theilung der Körper geschieht überhaupt durch das Eindringen anderer Körper in die Zwischenräume derselben, insonderheit durch Zerschneiden, Zerstoßen, durch Erweichung und Auflösung derselben in flüssigen Körpern, und durchs Feuer. Indessen können wir die Körper nicht bis zu ihren ersten ursprünglichen Theilen, daraus sie

sie zusammengesetzt sind, auflösen, obgleich einige Körper in sehr viele und kleine Theile zertheilt werden können. Z. B. Ein Gran Gold, welches eine Masse ist, die kaum den dreyßigsten Theil eines Zolls lang, breit und dick ist, läßt sich durch Schlagen so ausbreiten, daß man eine Fläche, welche 5 Fuß lang und breit ist, damit bedecken kann. Ein Silberdrath, welcher ohngefehr eine Unze schwer und mit 8 Gran Gold überguldet ist, läßt sich so sehr ausdehnen, daß man einen Faden, der auf 13000 Fuß lang und doch überall vergüldet ist, daraus machen kann. Bey einem hellglänzenden Körper, dergleichen das Gold ist, kann man annehmen, daß in einem Raum von einem Zoll 600 der Länge nach neben einander liegende Theilchen des Körpers mit bloßen Augen sichtbar sind. Demnach sind bey einem dergleichen überguldeten Faden auf jeder Seite desselben mehr als 93 Millionen Theile des Goldes sichtbar, ohnerachtet eine Masse von 8 Gran Goldes nur den funfzehnten Theil eines Zolls lang, breit und dick ist. Ein Gran Carmin läßt sich im Wasser so sehr auflösen, daß es 10 Maaß Wasser färbt. Durch die Kräfte der Natur scheint eben so wenig je eine Theilung der Körper in ihre ursprünglichen Theile bewerkstelligt zu werden, obgleich die Natur noch ungleich kleinere körperliche Theile darstellt, als durch die Kunst möglich ist. Man hat durch das Vergrösserungsglas kleine Thiere entdeckt, deren Größe noch nicht völlig 300 Billionen Theilchen eines Cubikzolls, eines Raums, der 1 Zoll lang, breit und hoch ist, beträgt. Ein einzelnes Theilchen der in diesen Thieren circulirenden Säfte muß so klein seyn, daß 125 Quadrillionen dieser Theile erst den Raum eines Sandkorns füllen würden.

6. Welche Eigenschaften werden außer diesen vier wesentlichen Eigenschaften bey allen Körpern noch gefunden?

1) Die **Porosität**, nach welcher die Theile derselben den Raum nicht ganz füllen, welchen die Körper einnehmen, sondern zwischen denselben leere oder doch nur mit fremden Materien angefüllte Räume sich befinden; welche Räume die **Zwischenräume** der Körper genannt werden.

Anmerk. Diese Zwischenräume sind bey einigen Körpern, z. B. bey dem Schwamm, mit bloßen Augen, bey andern durch das Vergrößerungsglas sichtbar, zumal wenn man dünne Scheiben der Körper betrachtet. In diesen Zwischenräumen der Körper ist oft eine Menge Luft verschlossen, wie sich beym kochenden Wasser, beym Schießpulver u. dergl.

dergl. wie auch durch Versuche mit Wasser, Bier, Milch, Obst, Eyern u. a. unter der Luftpumpe zeigt.

2) Die **Schwere**, oder eine Kraft, vermöge welcher alle Theile der Materie in der Körperwelt bey einander zu seyn bemüht sind, oder ein jedes Theilchen der Materie ein jedes anderes Theilchen an sich zieht, daher diese Kraft auch die **anziehende Kraft** der Körper genannt wird.

Anmerk. Es wurde die Schwere anfänglich nur als eine Eigenschaft der Körper auf der Erde angesehn, und man nannte einen Körper blos deswegen schwer, weil man bemerkte, daß derselbe unterwärts drucke, oder wenn er von der Oberfläche der Erde entfernt und nicht zurückgehalten wird, gerade unterwärts falle. Man hat aber nachgehends gefunden, daß dieses nur deswegen geschehe, weil sowohl ein solcher Körper als die Erde Materie sind. Und genauere Beobachtungen und Versuche haben gelehrt, daß ein solcher Druck oder Bewegung sich immer äußere, wo Materie ist, und daraus geschlossen, daß die Schwere eine allgemeine Kraft der Materie sey, und sich allemal nach den Gesetzen richte, welche jetzt folgen.

7. Welches sind die Gesetze dieser allgemeinen anziehenden Kraft oder Schwere der Körper.

1) Diese Kraft ist bey einem Körper desto größer, je mehr Masse derselbe hat, oder je mehr Theilchen von Materie, deren jedem diese Kraft zukommt, bey einander sind.

Anmerk. Ein Körper, welcher in einerley Raum mehr Masse enthält, als ein anderer, wird in Ansehung dieses Körpers ein Körper schwererer Art und dieser in Ansehung des ersten ein Körper leichterer Art genannt. Z. B. Eine Kugel von Gold enthält mehr Masse und wiegt viel mehr, als eine gleich große Kugel von Eisen, daher ist das Gold ein Körper schwererer Art als das Eisen, und dieses ein Körper leichterer Art als das Gold. Die vornehmsten und bekanntesten Körper folgen in Ansehung der Menge der Materie, welche sie in einerley Raum enthalten, in folgender Ordnung auf einander; Gold (19640), Queckſilber (14000), Bley (11325), Silber (11091), Kupfer (8784), Messing (8000), Stahl (7809), Eisen (7645), Zinn (7471), Magnetstein, Diamant, Marmor, gemeines Glas (2666), Kieselstein, Porcellän, Kochsalz (2148), Seesalz, Salpeter (1900).

(1900), Elfenbein, Schwefel, Vitriolöhl (1700), Gummi, Scheidewasser, Ebenholz (1177), Pech, Menschenblut (1040), Biereßig, Canarienseck, Buchsbaumholz, Seewasser (1030), Milch, Franzwein, Weinessig, Flußwasser (1009), Regenwasser (1000), Brunnenwasser (999), Rheinwein, Pontak, Champagnerwein, Wachs, Burgunderwein, Leinöl, Baumöl (913), Eis (889), Eichenholz (870), Büchenholz (854), Rüböl, Erlenholz, Terpentinöl, Pflaumenbaumholz, Fichtenholz (663), Lindenholz (604), Tannenholz (555), Kork (240), Luft ($1\frac{4}{27}$), Feuer. Das Bier ist nach seiner verschiedenen Güte zum Theil leichterer, zum Theil schwererer Art als das Regenwasser. Die bey einigen der hier genannten Körper beygefügten Zahlen zeigen die Verhältnisse der Schwere der Körper an. Z. B. Die beym Gold und Regenwasser stehenden Zahlen bedeuten folgendes: Wenn eine Menge Regenwassers 1000 Pfund oder Loth oder Quentchen u. s. w. wiegt, so wiegt ein Stück Gold, das eben so viel Raum einnimmt, als diese Menge Wassers, 19640 Pfund oder Loth oder Quentchen u. s. w. Durch diese Verhältnisse, die von viel mehrern Körpern bekannt sind, wird das eigenthümliche Gewicht oder die besondere Schwere der Körper bestimmt.

2) Diese Kraft ist desto größer, je näher die Körper, die sich einander anziehn, an einander kommen, und zwar wird sie zweymal zwey oder viermal größer, wenn die Entfernung der Körper zweymal kleiner, d. i. um die Hälfte vermindert wird, dreymal drey oder neunmal größer, wenn die Entfernung dreymal kleiner wird, viermal vier oder sechszehnmal größer, wenn die Entfernung viermal kleiner wird, u. s. w. Sie ist am größten, wenn die Körper einander unmittelbar berühren.

3. Welches sind die vornehmsten Erscheinungen, welche aus dieser allgemeinen Schwere erklärt werden können?

1) **Die Bewegungen der großen Weltkörper** in ihren Laufbahnen. Die Sonne hat mehr Masse als alle Planeten, welche sich um dieselbe bewegen, sie zieht daher dieselben beständig gegen sich, und verursacht eben dadurch, daß sie sich nicht aus ihren Laufbahnen

bahnen um dieſelbe entfernen zu können. Die Erde hat mehr Maſſe als der Mond, welcher ſich um dieſelbe bewegt, ſie zieht daher denſelben ebenfalls beſtändig gegen ſich, und verurſacht eben dadurch, daß ſich derſelbe nicht aus ſeiner Laufbahn um dieſelbe entfernen kann.

Anmerk. Der Mond kann zwar die Erde nicht merklich aus ihrer Laufbahn um die Sonne entfernen, indeſſen zieht derſelbe doch das Waſſer in den großen Weltmeeren gegen ſich, und verurſacht dadurch, daß es innerhalb 24 Stunden zweymal in einigen Gegenden aufſchwillet, in andern aber fället, und ſich von den Ufern entfernt, welches die Ebbe und Fluth genannt wird. Es iſt wahrſcheinlich, daß derſelbe auf eine gleiche Art ſeine Wirkungen auf die Atmoſphäre der Erde äußere, und dadurch wichtige Veränderungen in der Witterung hervorbringe.

2) Die Bewegung der Körper auf der Erde, welche über die Oberfläche derſelben erhoben werden, gegen dieſelbe. Z. B. Ein Stein, welchen man in der Hand hält, fällt gegen die Erde nieder, ſobald man die Hand öfnet; denn die Erde, welche mehr Maſſe enthält als der Stein, zieht denſelben ſtärker gegen ſich als der Stein die Erde, daher derſelbe, ſobald er frey iſt, niederfallen muß.

Anmerk. 1) Dieſe Bewegung eines Körpers gegen die Erde geſchieht allemal in dem kürzeſten Wege, der möglich iſt; daher drückt ein Stein gerade unterwärts gegen den ſenkrecht unter ihm liegenden Ort der Oberfläche der Erde, und fällt auch gegen denſelben, wenn er in ſeiner Bewegung durch nichts gehindert wird. Ein an einem Faden aufgehängter ſchwerer Körper, z. B. eine bleyerne Kugel ſpannt dieſen Faden nach einer vertikalen Linie, wiewol wegen der beſtändigen Bewegung der Erde der Weg des fallenden Körpers nie wirklich eine vertikale Linie iſt.

2) Dieſe Bewegung wird oft durch andere Körper, zwiſchen welchen ſie geſchieht, gehindert oder gar aufgehoben, daher ſenkt ſich z. B. ein Stück Holz, welches man aufs Waſſer legt, nur um einen Theil ein, und ſchwimmt auf dem Waſſer, obgleich ein Stein in demſelben zu Boden fällt, weil das Waſſer ſchwererer Art iſt, und alſo ſtärker gegen die Erde gezogen wird, als das Holz, ein Stein aber ſchwererer Art iſt, und alſo ſtärker gegen die Erde gezogen wird, als das

Wasser; dahingegen ein Stein auf Quecksilber so wie Holz auf Wasser schwimmt, weil das Quecksilber schwererer Art ist, als ein Stein. Eben daher schwimmen die Wolken in der Luft, welche die Erde umgiebt; sobald aber die wässrigen Dünste in den Wolken in Tropfen zusammenfließen, fallen diese, weil sie schwererer Art sind als die Luft, in derselben nieder. Der Rauch und die Flamme steigen in der Luft in die Höhe, weil sie leichterer Art sind als die Luft, und daher von derselben eben so wie ein Stück Holz, welches man unters Wassers hält, in die Höhe gedrückt werden. Wenn man in ein gläsernes Gefäß Quecksilber, Wasser und Oel gießt, so vermischen sich diese drey flüßigen Körper nicht, sondern das Wasser steht über dem Quecksilber, und das Oel über dem Wasser, welche Erscheinung auf eine ähnliche Art erklärt werden kann.

2) Die Erde enthält in Ansehung aller Körper, welche von uns über dieselbe gehoben werden können, so viel Masse, und die Höhe, bis zu welcher wir einen Körper von der Erde entfernen können, ist so geringe, daß die Schwere mehrerer Körper, welche wir zugleich über die Erde erheben können, gegen einander gar nicht merklich wird, daher z. B. zwey von einander abgesonderte Steine auch in der größten Höhe, zu welcher wir sie bringen können, doch immer noch beyde so stark gegen die Erde gezogen werden, daß sie einander selbst gar nicht merklich anziehn können. Dagegen lehrt die Erfahrung, daß hohe Berge leichte Körper z. B. Wolken und Dünste anziehn, ein Bleyloth in der Entfernung aus seiner vertikalen Lage bringen, u. dergl.

4) Da alle Theile der Materie in einem Körper gegen die Erde gezogen werden: so sieht man leicht, daß ein Körper, welcher mehr Masse als ein anderer hat, auch stärker gegen die Erde gezogen werden, oder schwerer seyn, also auch stärker drücken müsse, weil in demselben mehrere Theilchen bey einander sind, welche alle zugleich gezogen werden.

5) Zween und mehrere Körper von gleicher Materie und Größe, z. B. zwo gleich große eiserne Kugeln fallen gleich schnell. Wenn aus beyden ein Körper gemacht wird, oder beyde mit einander verbunden werden; so werden sie, wenn nicht andere Umstände eine Veränderung verursachen, wiederum eben so schnell fallen. Ueberhaupt fällt daher ein Körper, der schwerer ist, nicht schneller, als der leichtere, weil er schwerer ist, sondern weil er den Widerstand der Luft leichter und schneller überwinden kann. Eine ganze Armee kann nicht schneller gehn, als ein einzelner Mensch. In einem luftleeren Raum fällt auch ein Stück Gold, Bley und dergl. eben so schnell als eine Pflaumfeder.

3) Der Zusammenhang der Theile, daraus ein Körper besteht, und eines Körpers mit einem andern,

welche

welche sich unmittelbar und in vielen Puncten berühren, davon wieder zu bemerken:

a) Die Theile eines **festen Körpers** oder zwey feste Körper hangen mit einander zusammen, wenn sie sich einander in gutpolirten Oberflächen berühren.

Z. B. Zwey Marmorsteine oder Stücke Bley, auf deren jeden man eine Seite vollkommen polirt hat, hangen sogleich zusammen, wenn man sie mit diesen Seiten an einander drucket.

Anmerk. Weil die Oberflächen der meisten Körper nicht vollkommen polirt werden können: so pflegt man auf dieselben eine flüssige Materie zu streichen, welche, wenn sie trocken und hart wird, solche Körper mit einander verbindet. Auf diese Weise werden Stücken Holz oder Papier mit Leim, Steine mit Kalk oder Kütte, Metalle mit Lothe zusammengefügt.

b) Die Theile eines **flüssigen Körpers** hangen so lange unter einander zusammen, als ihre Menge die Grösse eines **Tropfens** nicht übertrift, und kein andrer stärkerer Zug da ist, der sie von einander trennt; ein Tropfen aber hat eine runde Figur, weil die Theile desselben sich von allen Seiten einander gleich stark anziehn.

Z. B. Der Regen fällt aus den Wolken in runden Tropfen nieder.

Anmerk. Wenn man ein Gefäß bis etwas über den Rand voll Wasser gießt: so fließt solches nicht gleich über, sondern bleibt über dem Rande in der Höhe eines Tropfens stehn, weil dieser über den Rand erhabene Theil des Wassers als eine Menge von Tropfen anzusehn ist, welche in einander fließen, und sich durch ihren eigenen innern Zusammenhang erhalten.

c) Die Theile eines **flüssigen Körpers** hangen sich an **feste Körper** schwererer Art an, und dringen in dieselben ein, wodurch diese naß oder weich gemacht oder aufgelöst und geschmolzen werden.

Z. B. Wenn man einen Finger ins Wasser taucht: so hangen sich die zunächst um denselben liegenden Wassertheilchen an denselben, und machen ihn dadurch naß, weil der Finger schwererer Art ist, als das Wasser; dahingegen hängt sich Quecksilber an Gold

an, weil das Gold schwererer Art ist, und es daher stärker anziehn kann, als es durch seinen eigenen innern Zug zusammengehalten wird.

Anmerk. Die Theile eines flüssigen Körpers, welche zunächst an dem Rande eines nicht ganz vollen Gefäßes schwererer Art liegen, werden von demselben über seine übrige Oberfläche etwas in die Höhe gezogen, und bleiben an dem Rande des Gefäßes hangen. Gießt man einen flüssigen Körper aus einem solchen Gefäße, so läuft derselbe auswärts an dem Gefäße nieder, wenn man nicht sehr schnell zugießt, oder das Gefäß nicht einen auswärts gebogenen Rand hat, weil das Gefäß die überfließenden Theile des flüssigen Körpers gegen sich zurück zieht. Dies erfolgt jedoch beym Queckſilber nicht, außer wenn die Theile des Gefäßes schwererer Art sind, oder die Oefnung des Gefäßes sehr subtil ist.

2) Wenn man subtile gläserne Röhren, welche kaum so weit sind als ein Haar dick ist, und daher Haarröhren genannt werden, in eine flüssige Materie leichterer Art stellt: so steigen Theile derselben nach und nach in der Röhre in die Höhe, weil sie von den innern Seiten derselben eben so wie von dem Rande eines weitern Gefäßes angezogen werden. Ist das andere Ende einer solchen Röhre unterwärts gebogen, so fallen diese in der Röhre aufgestiegene Theile des flüssigen Körpers vermöge ihrer Schwere wieder nach und nach heraus. Eben so können flüssige Materien in andern festen Körpern schwererer Art, welche kleine an einander liegende Zwischenräume haben, aufsteigen. Hieraus kann man erklären, wie ein Schwamm, welcher nur mit einem Theile ins Wasser getaucht wird, dasselbe in sich ziehe, wie der Saft in den Pflanzen und Bäumen, das Oel oder geschmolzene Talg in dem Dachte eines Lichtes, das Wasser in einem wollenen Lappen, den man vorher darin naß gemacht hat, und über den Rand eines Gefäßes in dasselbe hängt, in die Höhe steigt, imgleichen warum ein sandiger Boden, unter welchem ein nasser Letten liegt, lange Zeit feuchte bleibt, weil der Sand das Wasser aus dem Letten in seinen Zwischenräumen in die Höhe zieht.

3) Alle Salze werden im Wasser, die Harze im Weingeist, die Metalle im Scheidewasser, welches aus gemeinem Wasser, Salpeter und Vitriol zubereitet wird, aufgelöst, indem die Theile dieser flüssigen Körper in die Zwischenräume der angezeigten festen Körper eindringen, und ihre Theilchen von einander trennen. Das Feuer kann als der leichteste und subtilste flüssige Körper in alle andere Körper eindringen, und dieselben dadurch nicht nur erwärmen, sondern auch entweder schmelzen, wie bey den Metallen geschieht, oder verbrennen, wie bey dem Holze geschieht, oder doch mürbe machen, wovon nur einige Arten Steine z. B. der Asbest ausgenommen zu seyn scheinen. Ingleichen be-

befördert es das Eindringen der flüssigen Körper in feste, daher das Fleisch beym Feuer gekocht oder gebraten wird, um es weicher und verdaulicher zu machen. Bey dieser Auflösung fester Körper ereignet sich oft ein Aufbrausen, z. B. wenn Wasser auf ungelöschten Kalk, Essig auf Kreide, Scheidewasser auf kalkartige Steine gegossen wird, ingleichen eine Gährung, wie beym Wein und Bier, oder eine Fäulung, wie bey todten Körpern der Menschen und Thiere geschieht.

4) Wenn ein flüssiger Körper sich an einen festen, ohnerachtet derselbe schwererer Art ist, nicht anhängt, so ist solches blos dem Mangel genugsamer Berührungspunkte oder einem anderweitigen stärkern Zuge zuzuschreiben. Daher zerfließen die Wassertropfen nicht leicht auf einem polirten Metalle, weil sie dasselbe wegen ihrer runden Figur und der ebenen Oberfläche des Metalls nur in wenigen Punkten berühren, ingleichen auch nicht auf fetten oder mit Oel bestrichenen, oder mit einem Staube bedeckten Körpern, z. B. auf den Blättern einiger Pflanzen, weil diese dadurch eine rauhe Oberfläche bekommen, welche das Wasser nur in wenigen Punkten berührt; daher man die Metalle polirt und mit Baumöl bestreicht, um sie vor dem Roste, welcher von wäßrigen Feuchtigkeiten herrührt, zu bewahren. Ingleichen kann man ein Stück Geld, oder einen Ring aus einem Gefäße mit Wasser nehmen, ohne die Finger naß zu machen, wenn man sie vorher mit feinem Blumenstaube bestreicht, oder dergleichen Blumenstaub z. B. semen lycopodii auf die Oberfläche des flüssigen Körpers schüttet. Dahingegen hängen sich die Theile flüssiger Körper, das Quecksilber ausgenommen, auch an Holz an, weil die kleinsten Theile desselben schwererer Art sind als flüssige Körper, obgleich ein ganzes Stück Holz leichterer Art ist.

Die besondern Eigenschaften der Körper.

9. * Wie können die Körper eingetheilt werden?

I. In Ansehung der **Verschiedenheit** der kleinsten ursprünglichen Theile, daraus sie zusammengesetzt sind, wovon wir aber keine Kenntniß haben.

II. In Ansehung **der Zusammensetzung** ihrer Bestandtheile, und zwar

a) In Ansehung der **Menge** von Theilen, welche in gleichen Räumen beysammen sind, in **dichte** und **dünne** oder **lockere** Körper. Die erstern enthalten viele, die andern wenige Materien in

gleichen Räumen, und haben also mehrere oder größere leere d. i. mit der eigenthümlichen Materie des Körpers nicht angefüllte Zwischenräume.

Anmerk. Die dichten Körper sind allemal zugleich schwerere, und die dünnen leichtere Art. Daher ist das Gold unter den Körpern, die wir kennen, der dichteste und zugleich von der schwersten Art.

b) In Ansehung der **Lage** der Theile, daraus die Körper bestehn, in **durchsichtige** und **undurchsichtige**. In den erstern liegen die Bestandtheile so neben und über einander, daß eine Menge von Lichtstrahlen ungehindert durchgehn kann, dazu sonderlich das Glas gehört: in den andern liegen sie so, daß keine Lichtstrahlen durchgehn können, dazu sonderlich die Metalle gehören.

Anmerk. Einige undurchsichtige Körper können durchsichtig gemacht werden, wenn man sie mit einer flüssigen Materie bestreicht, welche vielleicht das Licht stärker anzieht, und demselben dadurch den Weg durch solche Körper bahnt. Z. B. Das Papier wird durchsichtig, wenn man es mit Terpentinöl bestreicht.

c) In Ansehung des **Zusammenhanges** der Bestandtheile, und zwar wieder

a) In Ansehung der **Größe** dieses Zusammenhanges, in **feste** und **flüssige** Körper. In den erstern hängen die Theile stark, in den andern sehr geringe zusammen.

Anmerk. 1) Ein Körper, der einen hohen Grad der Festigkeit hat, wird hart; ein solcher aber, der einen geringen Grad der Festigkeit hat, weich genannt. Der Diamant ist unter den Körpern, die wir kennen, der härteste, ob er gleich nicht so dichte als das Gold ist.

2) Ein allgemeines Kennzeichen der flüssigen Körper ist, daß sie die Figur eines jeden Gefäßes annehmen, in welches sie gebracht werden, und bey einer hinlänglich weiten Oeffnung desselben jederzeit eine horizontale Oberfläche haben.

b) In

b) In Ansehung der **Wirkungen** des Zusammenhanges, bey geschehener Veränderung der Figur der Körper durch einen äußern Druck, werden die Körper überhaupt in **spröde** und **biegsame**, wozu die **elastischen** gehören, eingetheilt. Die **spröden** zerbrechen bald, wenn man ihre Figur ändern will, dazu die Steine, das Glas, der Zucker u. dergl. gehören. Die **biegsamen** sind diejenigen, deren Figur geändert werden kann, ohne daß ihr Zusammenhang sogleich aufhöre, dazu das Gold, Silber, Kupfer, Bley, Papier, Tuch, Seide, Haare u. dergl. gehören. Die **elastischen** aber nehmen ihre vorige Figur von selbst wieder an, sobald der äußere Druck aufhört, dazu sonderlich das Stahl, junges Holz, die Federn der Vögel, Elfenbein, Fischbein, die Luft und die Dünste gehören.

Anmerk. 1) Die Körper, welche einen großen Grad der Biegsamkeit haben, werden zähe genannt, wozu das Wachs, die Häute der Thiere, die Saiten u. dergl. gehören.

2) Einige Körper bestehen aus harten langen Fasern oder Platten, welche sich spalten lassen, wozu das Holz und die Schiefersteine gehören.

3) Die auf der Erde wirklich vorhandenen Körper werden ohne Rücksicht auf alle diese Eintheilungen in der Naturhistorie in drey Reiche der Natur eingetheilt, damit man mehrere besondere Arten und Gattungen derselben bequemer bestimmen könne.

Das Feuer.

10. * Was ist das Feuer?

Ein flüssiger und elastischer Körper, welcher in uns die Empfindung der Wärme hervorbringt.

Anmerk. Das reine oder Elementar-Feuer ist eben sowohl unsichtbar, als die Luft; es wird aber öfters, wenn es mit fremden Theilen häufig vermischt worden, vermittelst derselben entweder in der Oberfläche eines Körpers, von welchem wir sagen, daß er glüe, oder über derselben als ein

ein besonderer flüssiger sich auswärts bewegender Körper, welchen wir die Flamme nennen, sichtbar.

11. Welches sind die vornehmsten besondern Eigenschaften des Feuers?

1) Die **Feinheit** seiner Theile, welche in die kleinsten Zwischenräume aller andern Körper sehr leicht eindringen können.

2) Die **Flüssigkeit**, und zwar ist das Feuer der allerflüssigste Körper, den wir kennen, indem die Theile desselben sehr leicht über und neben einander bewegt werden können.

3) Die **Elasticität**, indem es sich gegen alle Seiten von selbst ausbreitet. Denn sonst würden unsere Stuben, wenn gleich der Ofen voll Feuer wäre, nie warm werden, und wenn sie einmal warm sind, nicht sobald wieder kalt werden.

4) Die **Leichtigkeit**, indem die Flamme in der Luft in die Höhe steigt, und ein erwärmter oder glühender Körper durch die in denselben gebrachten Feuertheile nicht merklich schwerer wird.

12. Was ist außer diesen vier Eigenschaften des Feuers von seiner Beschaffenheit noch besonders zu bemerken?

1) Der **Aufenthalt** des Feuers. Das eigentliche reine Feuer ist wegen seiner Flüssigkeit und Elasticität überall durch den ganzen Weltbau und zwar allenthalben in gleicher Menge ausgebreitet. Das wirklich brennende und leuchtende Feuer befindet sich da, wo das reine Feuer auf besondere Art rege gemacht oder in Bewegung gesetzt worden, und durch brennbare Theile unterhalten wird.

2) Die **Hervorbringung** und Erregung des Feuers geschieht überhaupt durch eine starke Erschütterung eines Körpers, wodurch das darin verschlossene

Feuer

Feuer in Bewegung geſetzt wird und häufig hervorbringt; inſonderheit geſchieht dieſes

a) durch die Wirkung eines ſchon brennenden Feuers auf brennbare Körper.

Daher können z. B. die Sonnenſtrahlen, wenn man ſie durch ein Brennglas oder Brennſpiegel in einen kleinen Raum zuſammenbringt, ein Feuer erregen, ein brennendes Licht zündet ein anderes an, welches man in die Flamme deſſelben hält, und Schwefel entzündet ſich auch an einem heißen Ofen, indem die brennbaren Theile des Schwefels von der Hitze des Ofens ſo erſchüttert werden, daß ſie in eine Flamme gerathen.

b) Durch die heftige Wirkung zweyer Körper in einander, davon keiner vorher brennt, und zwar

(a) bey feſten Körpern

1) durch ſtarkes Schlagen des einen gegen den andern.

Daher wird z. B. Eiſen warm und endlich glüend, wenn man es mit einem Hammer ſtark ſchlägt, und wenn man Stahl gegen einen harten Stein ſchlägt, ſo werden dadurch von beyden kleine Stückchen abgeriſſen, welche in glüende Kügelchen oder Funken ſchmelzen.

2) durch das Reiben der Oberflächen derſelben an einander.

Daher entzündet ſich z. B. Holz, wenn es mit einem Stricke oder andern harten Holze ſtark gerieben wird. Eben daher brennt ein Wagen an, wenn man damit lange ſehr ſchnell fährt, ohne das Reiben der Räder mit der Axe durch Theer oder Seife zu vermindern, und eine Kugel, welche durch die Luft geſchoſſen wird, erwärmet ſich.

(b) Die flüſſigen Körper können eine Wärme, Hitze, oder auch Flamme hervorbringen,

1) wenn ſie feſte Körper auflöſen, welche viel verſchloſſenes Feuer enthalten.

Daher erhitzen ſich z. B. die gebrannten Kalkſteine, wenn Waſſer darauf gegoſſen wird, und der Phosphorus, welches ein feiner Kalk iſt, der aus verſchiedenen verfaulten Materien durch ſtarkes Feuer gebrannt werden kann, leuchtet, ſobald er an die freye Luft kommt, die ihn auflöſet, und entzündet leicht verbrennliche Materien, wenn er auf denſelben zerrieben wird. Eben ſo werden Feilſpäne erhitzt, wenn man Scheidewaſſer darauf gießet.

2) Durch Verhinderung der Bewegung seiner Theile.

Daher das Feuer verlöscht, wenn man z. B. den brennenden Körper mit einem andern bedeckt, und insonderheit mit einer beträchtlichen Menge Wassers begießt, indem das Wasser, welches sich an die Oberfläche desselben anhängt und seine Zwischenräume verschließt, die schnelle Bewegung der hervordringenden Feuertheile hindert. Indessen läßt sich brennendes Oel oder Fett nicht mit Wasser löschen, weil solches sich nicht an die Oberfläche dieser Körper anhängt, sondern da dieselben leichterer Art sind, darin niederfällt, und das brennende Oel und Fett mit vieler Gefahr umherwirft. Ingleichen kann auch der über einer Flamme angehäufte Rauch dieselbe ersticken, daher ein Licht, welches man in einen zugedeckten Topf oder eine Laterne ohne gegenüberstehende Oefnungen gestellt hat, ingleichen das Feuer in einem Ofen, der keinen Zug hat, oder in einem entzündeten Schornsteine, dessen Oefnung mit nassen Decken oder Säcken voll Mist bedeckt wird, bald verlöscht.

3) Durch eine gar zu schnelle Ausbreitung der Feuertheile, oder plötzliche Entfernung derselben von dem brennenden Körper.

Daher verlöscht z. B. ein Licht in einem luftleeren Raume, oder wenn man stark hineinbläst, ingleichen ein brennender Schornstein, wenn man hineinschießt. Eben dieses geschieht, wenn man in einen brennenden Schornstein eine lebendige Gans von oben hineinwirft, welche das Feuer mit ihren Flügeln gleichsam wegkehrt, ingleichen wenn man, im Fall der Schornstein nicht hoch ist, auf dem Heerde Schwefel oder nur Stroh anzündet, wodurch die Luft unten im Schornsteine so verdünnt wird, daß die obere Luft plötzlich hineinfahren kann. Ingleichen kann zuweilen das Feuer in einer brennenden Stadt gelöscht werden, wenn ein Haus durch Pulver in die Luft gesprengt wird, und ein vom Wetterstrahl entzündetes Haus wird zuweilen durch einen gleich darauf folgenden Schlag in dasselbe wieder gelöscht.

13. *Welches sind die vornehmsten Wirkungen des Feuers?

1) Ueberhaupt dehnen die Feuertheile, indem sie in einen Körper häufig eindringen, denselben aus.

Daher wird z. B. ein eiserner Drath länger, wenn man ihn heiß oder glühend macht, und Wasser steigt in einer engen gläsernen Röhre in die Höhe, wenn es erwärmt wird.

Anmerk. 1) Diese Ausdehnung der Körper durch die Wärme ist der Grund der Thermometer, welche von Cornelius Drebbel, einem Bauer in Nordholland, erfunden sind. Die bekanntesten und häufigsten Arten derselben werden jetzo

jetzo gemeiniglich also verfertigt. Es wird eine enge gläserne mit einer hohlen Kugel versehene Röhre ohngefähr bis an die Hälfte mit Quecksilber gefüllt. Diese Röhre wird in siedendes und hernach in gefrierendes Wasser gesetzt und beydemal an derselben bemerkt, wie hoch das Quecksilber darin steht. Hierauf befestigt man sie an einem mit Papier oder weisser Farbe überzogenen Brette, und schreibt bey dem Punct der Röhre, wo das Quecksilber in dem siedenden Wasser gestanden 212, bey dem Punct aber, wobey es in dem gefrierenden Wasser gestanden, 32. Der Zwischenraum zwischen beyden Puncten wird in 180 gleiche Theile oder Grade getheilt, und diese Eintheilung unterwärts bis an die Kugel fortgesetzt, welche Eintheilungsweise die Fahrenheitsche heißt. Oder es wird bey dem Punct des siedenden Wassers 0 und bey dem Punct des gefrierenden Wassers 150 geschrieben, der Zwischenraum aber in 150 gleiche Theile getheilt, und diese Eintheilung ebenfalls bis an die Kugel fortgesetzt, welche Eintheilungsweise die Delislische heißt. Diejenigen Thermometer, wo bey dem Punct des gefrierenden Wassers 0 und bey dem Punct des siedenden Wassers 80 geschrieben, der Zischenraum in 80 gleiche Theile getheilt, und diese Eintheilung gleichfalls bis an die Kugel fortgesetzt ist, werden gewöhnlich Reaumürische Thermometer genannt. Anstatt des Quecksilbers kann man die Kugel und Röhre auch mit gefärbtem Weingeist füllen. Das Füllen geschieht in beyden Fällen dadurch, daß man die Kugel an einem Lichte heiß mache, und hierauf das offene Ende der Röhre in ein Gefäß mit Quecksilber oder Weingeist stellt, welches öfters wiederholt werden muß, worauf dieses Ende der Röhre an einem Lichte zugeschmolzen wird. Wird nun ein solches Thermometer in der Luft oder neben einem andern Körper aufgehangen; so theilt sich die Wärme der Luft oder solches andern Körpers dem Quecksilber oder Weingeist mit, welches dadurch, wenn nemlich das Thermometer vorher in einem kältern Orte gewesen, ausgedehnt wird, folglich in der Röhre in die Höhe steigt, und vermittelst des beygeschriebenen Gradzeigers den Grad der Wärme anzeigt.

a) Ein Stück feuchtes Holz wird zwar in der Wärme kleiner und trocknet ein, es rührt aber dieses blos daher, weil die Feuchtigkeiten, die es ausdehnen, durch das Feuer vertrieben werden.

b) Wenn ein zerbrechlicher Körper, z. B. Glas, schnell erwärmt, oder nachdem er nach und nach erwärmt worden, plötzlich in die Kälte gebracht wird, so pflegt derselbe zu zerspringen, weil im ersten Fall seine Theile auf einmal zu stark ausgedehnt, im andern aber zu stark zusammengezogen werden.

lich, wo möglich, gegen Norden, wie auch in Entfernung von benachbarter erwärmter Luft, z. B. eines geheitzten Zimmers, einer Küchenwand am Heerde, von Schornsteinen u. dergl. aufgehängt. Die gröſte Wärme des Tages fällt gewöhnlich um 2 bis 3 Uhr Nachmittags, und die gröſte Kälte im Winter beym Aufgang der Sonne ein, daher zu diesen Zeiten, wie auch des Abends gewöhnlich die Thermometerbeobachtungen anzustellen sind. Folgende Bemerkungen über das Thermometer sind vorzüglich für Anfänger wissenswerth. Bey dem 32sten Grade des Fahrenheitschen Thermometers ist die Gränze des angehenden Frostes oder Thauwetters; bey 48 Graden ist die Luft temperirt; mit 60 Graden fängt die Sommerwärme an, und in geheitzten Zimmern ist auch eine Wärme von 60 bis 66 Graden für die Gesundheit am zuträglichsten. Durch eine Wärme von 72 Graden werden die Seidenwürmer ausgebrütet. Bey einer groſen Sommerhitze steigt das Queckſilber in den hiesigen Gegenden gewöhnlich auf 80, selten auf 88 und höhere Grade, wovon einige Beyspiele in dem Abschnitt von der Geschichte der Natur angeführt werden sollen. Auf Senegal, an der Mündung des Negerstroms ist 1738, den 12 April, eine Hitze von $108\frac{1}{2}$ Graden beobachtet worden. Die natürliche Wärme des Blutes beträgt ohngefähr 96 Grade. Zur Ausbrütung der Hühnereyer wird eine Wärme von 100 Graden erfordert. Die Hitze eines kleinen Holzfeuers beträgt über 1400 Grade. Bey der gewöhnlichen Winterkälte in den hiesigen Gegenden fällt das Queckſilber im Fahrenheitischen Thermometer selten tiefer als 20 oder 24 Grade unter dem Gefrierpunct, welches der 32ste Grad ist. In den nördlichen Gegenden sinkt es im Winter ungleich tiefer, in Petersburg gewöhnlich auf 8 bis 15 und 20 Grade unter 0, d. i. auf 40 bis 52 Grade unter dem Gefrierpunct, in Sibirien zuweilen auf 88 Grade unter 0, d. i. auf 120 Grade unter dem Gefrierpunct. Zu Jenisea, in Sibirien, stand es 1735, den 5ten Januar 126 Grade unter 0, d. i. 158 Grade unter dem Gefrierpunct.

3) Die meisten Salze haben die Eigenschaft, daß sie das Feuer aus andern, sonderlich flüssigen Körpern, darin sie aufgelöst worden, sehr schnell an sich ziehen und dadurch diese kalt machen; daher kann man Wasser selbst über glühenden Kohlen in Eis verwandeln, wenn man auf dieselben einen zinnernen Teller mit geschabtem Eise oder Schnee, so mit Salpeter, Salmiak, oder Küchensalz vermengt worden, und in diese Vermischung ein Gefäs mit Wasser setzt: denn das Salz zieht die Feuertheilchen, sobald das Eis auf dem Teller schmelzt, aus dem Wasser, und verursacht dadurch, daß es gefriert. Eine durch dergleichen Mischung des Salzes mit Schnee oder Eis, hervorgebrachte Kälte wird im Gegensatz der natürlichen eine künstliche Kälte genannt.

4) Das

4) Dasjenige, wodurch die Empfindung des Sehens zunächst hervorgebracht wird, oder wodurch umstehende Sachen sichtbar werden, wird das Licht, und in Ansehung seiner Bewegung von dem leuchtenden Körper der Lichtstrahl genannt. Der Mangel des Lichts in einem Theile eines erleuchteten Orts heißt der Schatten, und die gänzliche Abwesenheit desselben die Finsterniß. Einige Naturlehrer glauben, nach der Meynung Newtons, daß das Licht aus den feinsten Theilchen des Feuers bestehe, welche sich aus einem leuchtenden Körper gegen alle Seiten in geraden Linien entfernen, andere behaupten nach Euler, daß der ganze Weltraum mit einer sehr feinen elastischen Materie, welche sie den Aether nennen, angefüllt sey, und daß dieser von den leuchtenden Körpern angestoßen, und in eine schwingende Bewegung gebracht werde, welche sich bis in unsere Augen fortpflanze. Im fünften Capitel wird in der Optik die Lehre vom Lichte weitläuftiger abgehandelt werden.

Die Luft.

14. *Was ist die Luft?

Ein flüssiger und elastischer Körper, welcher die ganze Erde bis auf eine gewisse Höhe umgiebt, und in uns die Empfindung des Hörens hervorbringt.

Anmerk. 1) Die ganze Menge Luft, welche unsere Erde umgiebt, wird die Atmosphäre derselben genannt, die aber beständig mit vielen aufgelösten Theilen anderer Körper angefüllt ist, dazu gehören sonderlich: 1) der Staub, 2) Wasserdünste, 3) ölige Dünste, 4) salzartige und schwefelartige Dünste. Diese steigen von der Erde beständig auf, und zwar so, daß sie in der vorigen Ordnung sich immer höher erheben, da sie denn so lange in der Luft schweben, bis sie sich irgendwo zu sehr anhäufen, und im Regen, Schnee, Feuerkugeln u. dergl. wieder niederfallen.

2) Die wahre Beschaffenheit der Luft ist vornemlich durch die mit der von Otto von Guerike, einem Burgemeister zu Magdeburg, in der Mitte des vorigen Jahrhunderts erfundenen Luftpumpe angestellten Versuche entdeckt worden, welches eine Maschine ist, vermittelst welcher die Luft in einem verschlossenen Gefäße oder eingeschlossenen Raum sehr verdünnt werden kann.

3) Die Luft, und zwar ein freyer Zugang derselben, ist zur Erhaltung der meisten lebendigen Geschöpfe unentbehrlich, daher die Vögel und andere Thiere unter einer gläsernen Glocke, aus welcher entweder die Luft weggenommen worden, oder welche keinen freyen Zugang der Luft hat, in kurzer

kurzer Zeit sterben. Ein Werkzeug, wodurch die Güte und Gesundheit der Luft, z. B. in einem Zimmer geprüft werden kann, wird ein Eudiometer genannt.

15. *Welches sind die vornehmsten besondern Eigenschaften der Luft?

1) Die Flüssigkeit, daher wir uns in der Luft ungehindert bewegen können.

Anmerk. Die Theile der Luft sind nicht so fein, als diejenigen des Feuers, daher sie durch die Zwischenräume der Metalle, des Glases, nassen Leders u. a. nicht durchgehn können, indessen können sie in die Zwischenräume des lockern Holzes und des Wassers eindringen.

2) Die Elasticität oder ausdehnende Kraft, daher sie sich von selbst wieder ausbreitet, wenn sie in einen engern Raum zusammengedruckt wird, sobald dieser Druck nachläßt.

Anmerk. Diese ausdehnende Kraft der Luft wird durch das Feuer sehr vermehrt, daher eine zugebundene Blase, in welcher nur wenig Luft ist, aufschwillt, wenn man sie erwärmt, ingleichen geht der Brodteig auf, wenn derselbe gebacken wird, und das trockene Obst wird größer, wenn es gekocht wird, weil die Hitze die darin eingeschlossene Luft ausdehnt.

3) Die merkliche Schwere derselben, daher eine hohle metallne oder gläserne Kugel weniger wiegt, wenn die darin befindliche Luft vermittelst der Luftpumpe herausgebracht worden.

Anmerk. 1) Die Erfahrung lehrt, daß ein Cubikfuß Luft, das ist, so viel Luft, als ein viereckiges Gefäß, welches einen Fuß lang, breit und hoch ist, füllen würde, auf der Oberfläche der Erde etwas über zwey Loth wiege, und ohngefähr 860 mal leichter sey als eine gleiche Menge Wassers.

2) Wegen dieser Eigenschaft der Schwere druckt die in einer höhern Gegend der Atmosphäre befindliche Luft auf die untere, so wie jene gleichfalls von der noch höher liegenden Luft gedruckt wird. Da nun die untere Luft vermöge ihrer Elasticität durch diesen Druck zusammengepreßt wird, so ist sie auch dichter als die obere Luft. Eine Blase, welche in einem Keller oder Thal mit Luft gefüllt und verschlossen, hierauf aber auf einen hohen Berg gebracht wird, dehnt sich nach und nach aus, je höher sie herauf getragen wird, weil

weil die in ihr befindliche Luft, von der sie umgebenden dünnen Luft nicht so stark zusammengedruckt wird. Aus eben der Ursache fährt aus einer hohlen metallnen Kugel, welche geöffnet in einen tiefen Keller gebracht und daselbst mit einem Hahne verschlossen wird, ein Theil der in ihr befindlichen dichteren Luft heraus, wenn man sie auf einen hohen Berg bringt, und daselbst den Hahn öfnet. Daher ist auch die obere Luft wegen ihrer geringeren Dichtigkeit beständig kalt. Auf hohen Gebürgen kann der Schnee auch in den heissesten Ländern und im Sommer nie oder selten gänzlich schmelzen. Aus der allmähligen Abnahme der Dichtigkeit der Luft bey zunehmenden Höhen scheint auch zu folgen, daß die Atmosphäre eigentlich keine genaue Gränze habe, und daß folglich die Höhe der ganzen Atmotsphäre über der Oberfläche der Erde nicht zu bestimmen sey. (S. Fr. 17. b) Anm. 2) Die Dichtigkeit der untern Luft ist nicht zu allen Zeiten einerley. Ein Werkzeug, an welchem die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft beobachtet werden können, wird ein Manometer genannt.

4) Die **Durchsichtigkeit**, daher wir die entferntesten Sachen, z. B. Thürme und die Sterne, durch dieselben sehen können.

16. Welches sind die vornehmsten Wirkungen der Luft?

Der **Druck** derselben auf andere Körper, und der **Schall**, wodurch die Empfindung des Hörens hervorgebracht wird.

17. Was ist von dem Druck der Luft zu bemerken?

1) Es **entstehet** derselbe theils von der Schwere, theils von der Elasticität der Luft.

Anmerk. Da die Luft an jedem Orte vermöge ihrer Elasticität sich beständig auszudehnen sucht; so druckt sie auch vermöge dieser Kraft beständig gegen die obere Luft: und zwar müsse, wenn keine wirkliche Bewegung, wie z. B. beym Winde, erfolgt, Druck und Gegendruck gleich seyn; d. i. sie druckt sowol gegen die obere als gegen die umliegende Luft eben so stark, als sie von jener vermöge ihrer Schwere, und von dieser vermöge ihrer Elasticität gedruckt wird. Die Luft in einem Zimmer druckt demnach z. B. gegen die offene Oberfläche des Queckſilbers in einem Gefäße vermöge ihrer Elasticität eben so stark, als diese Oberfläche im freyen von der ganzen über ihr liegenden Luftsäule gedruckt werden würde. Ist demnach ein Körper von allen Seiten mit

Luft umgeben, so wird der Druck derselben auf ihn so wenig empfunden, so wenig die unter eine mit Gewichten beschwerte Wagschale gebrachte Hand den Druck dieser Gewichte empfindet, wenn in der andern Wageschale eben so große Gegengewichte liegen.

2) Es verursacht derselbe, wenn er auf der einen Seite eines Körpers vermehrt oder vermindert wird, verschiedene besondere Erscheinungen, davon sonderlich folgende zu bemerken sind.

a) In Ansehung fester Körper. Eine gläserne Glocke, welche auf eine mit nassem Leder bedeckte Fläche gestellt, und aus welcher die Luft vermittelst einer Luftpumpe weggenommen worden, wird durch die äußere auf ihr ruhende Luft so stark an die Fläche gedruckt, daß man sie von derselben nicht eher abnehmen kann, als bis man wieder Luft in dieselbe gelassen hat. Zwey hohle halbe Kugeln, welche blos an einander gesetzt, und aus welchen die Luft ebenfalls vermittelst einer Luftpumpe weggenommen worden, werden durch den Druck der äußern Luft desto fester an einander gehalten, je grösser sie sind, so daß sie oft durch viele Menschen nicht von einander gerissen werden können, sie fallen aber von selbst von einander, sobald wieder Luft in dieselben gelassen wird. Ein Weinglas, aus welchem die Luft durch angezündetes Papier vertrieben, und welches auf die ebene mit Sauerteig oder nassem Leder bedeckte Seite eines Mörsers oder andern Körpers umgekehrt gestellt worden, wird durch die äußere Luft so stark an den Mörser gedruckt, daß man denselben an dem Glase aufheben und wegtragen kann.

Anmerk. 1) Den hier angeführten Versuch mit den Halbkugeln, welche die magdeburgischen Halbkugeln genannt werden, machte Otto von Guericke im Jahr 1654

zu

zu Regensburg in Gegenwart des Kayſers Ferdinand III und einiger deutſchen Fürſten mit Halbkugeln, die beynahe eine Elle im Durchmeſſer hatten, und welche daher, nachdem ſie luftleer gemacht waren, von der Luft ſo feſt zuſammengedruckt wurden, daß 24 vorgeſpannte Pferde ſie nicht von einander trennen konnten.

2) Die in einem metallenen Gefäß zuſammengedruckte Luft ſtößt, indem das Gefäß geöfnet wird, einen vor der Oefnung liegenden ſchweren Körper mit der größten Heftigkeit fort. Hierauf beruht die Einrichtung der Windbüchſen.

b) In Anſehung flüſſiger Körper. Das Waſſer ſteigt in einer in daſſelbe geſtellten Röhre in die Höhe, ſobald in derſelben vermittelſt eines darin aufgezogenen Stempels ein luftleerer Raum gemacht wird, weil die auf die Oberfläche des Waſſers druckende Luft das unter der Röhre befindliche Waſſer in ſolchen leeren Raum hineintreibt. Eben ſo ſteigt es in einen Heber, wenn man die Luft ausſaugt, ingleichen in den Hals der Thiere, wenn ſie beym Trinken die Bruſt ausdehnen.

Anmerk. 1) Der Druck der Luft kann das Waſſer, womit eine oberwärts verſchloſſene unten aber offene und umgebogene Röhre gefüllt worden, in einer Höhe von ohngefehr 32 Fuß erhalten; das Queckſilber aber hält in einer ſolchen Röhre mit dem Druck der Luft gegen die untere Oefnung das Gleichgewicht, wenn es in der Röhre ohngefehr 29 rheinländiſche Zoll hoch ſtehet, nur muß in beyden Fällen der Raum in dem obern Theil der Röhre über der Oberfläche des Waſſers oder Queckſilbers luftleer bleiben. Hierauf gründet ſich die Einrichtung der Barometer oder Wettergläſer, welche von Evangeliſta Torricelli, einem Italiäner, erfunden worden. Es wird eine gläſerne Röhre, welche ohngefehr 3 Fuß lang und an dem einen Ende zugeſchmolzen iſt, mit Queckſilber gefüllt, hierauf aber umgekehrt, und mit dem offenen Ende in ein Gefäß mit Queckſilber geſtellt, da denn ſo viel Queckſilber aus der Röhre in das Gefäß läuft, daß das in der Röhre zurückgebliebene ohngefehr 29 Zoll hoch, von der Oberfläche des in dem Gefäß befindlichen Queckſilbers angerechnet, ſteht. Dieſe Röhre wird nebſt dem Gefäß an einem Brette, auf welches 30 Zoll getragen worden, davon die drey oberſten in 36 gleiche Theile oder jeder in 12 Linien eingetheilt worden, alſo befeſtigt, daß die Oberfläche des Queckſilbers in dem Gefäß auf den Anfang des erſten untern Zolles treffe.

Wird nun die Luft dichter, folglich der Druck derselben stärker, so wird dadurch etwas Quecksilber in die Röhre hineingetrieben, folglich muß dasselbe in dem obern luftleeren Theile der Röhre steigen; wird aber die Luft dünner, folglich der Druck derselben geringer: so muß das Quecksilber in der Röhre etwas niedersinken, indem ein Theil davon aus der Röhre in das Gefäß fließt. Folglich kann man dadurch die Veränderungen des Druckes der Luft, womit die Veränderungen des Wetters gemeiniglich verbunden sind, bemerken. Zu dieser Absicht wird dasselbe in einem gemäßigten Zimmer so aufgehängt, daß es eine genau vertikale Stellung habe, und es werden sodenn zu gewissen Zeiten des Tages die Höhen des Quecksilbers in der Röhre nach Zollen und Linien aufgezeichnet. Die besten dazu dienlichen Barometer sind die von Brander und de Lüc. Die Luft im Zimmer drückt übrigens auf Quecksilber im Barometer durch ihre Elasticität. Dieser Druck ist aber in einem gemäßigten Zimmer nach dem obigen jedesmal so stark, als der Druck der äußern Luft auf das Quecksilber vermöge ihrer Schwere seyn würde, wenn das Barometer in der freyen Luft hinge.

2) Wegen der verschiedenen Schwere der Luft in höhern und niedrigern Gegenden der Oberfläche der Erde steht das Quecksilber im Barometer zu einerley Zeit an verschiedenen Orten nicht gleich hoch. In höher liegenden Gegenden, insonderheit auf hohen Bergen, steht es niedriger, und in niedrigern Gegenden, insonderheit in Thälern, tiefen Gruben u. dergl. steht es höher, weil es in jenem Fall von einer dünnern und niedrigern Luftmasse, als in diesem gedruckt wird. Z. B. Auf dem Berge Pichincha in Peru welcher 15300 rheinländische Fuß hoch ist, steht das Quecksilber im Barometer nur ohngefähr auf 16 pariser, oder $16\frac{7}{12}$ rheinl. Zolle. Auf dem Berge Chimborasso in Peru, welcher 19978 rheinländische Fuß hoch, und unter den bekannten Bergen auf der Erde der höchste ist, steht dasselbe nur auf 14 pariser Zoll, dagegen es am Ufer des Meeres ohngefähr auf 28 pariser Zoll steht. Daher dient das Barometer zugleich zu Höhenmessungen. Bey einer Höhe von $3510\frac{1}{2}$ französischen Ruthen, (deren jede 6 pariser Fuß hält), oder 9 geographische Meilen würde das Quecksilber im Barometer nur noch $\frac{1}{10}$ einer pariser Linie hoch stehen; bey einer Höhe von ohngefähr 11 bis 12 Meilen würde die Höhe des Quecksilbers unmerklich werden.

3) Wenn man die Oberfläche eines erwachsenen Menschen 15 Quadratfuß, welches ein Maaß bedeutet, daß einen Fuß lang und breit ist, annimmt; so wiegt die ihn umgebende Luft mehr als 41000 Pfund. Es erhellt schon aus dem vorhergehenden, daß dieser Druck der Luft von den in derselben befindlichen Geschöpfen, so lange sie die Luft von allen

allen Seiten umgiebt, folglich auf keine Seite stärker, als auf die andere druckt, eben so wenig empfunden werden könne, als ein Fisch in der Tiefe des Meeres, so lange ihn das Wasser ganz umgiebt, die Last des über ihm befindlichen Wassers fühlen kann.

18. *Was ist von dem Schalle zu bemerken?

1) Es **entsteht** derselbe, wenn die Luft in eine zitternde Bewegung gesetzt wird. Dieses geschieht

a) Durch die zitternde Bewegung eines **elastischen** Körpers, welcher seine Bewegung der Luft als einem ebenfalls elastischen Körper mittheilt, wie bey Glocken, wenn sie angeschlagen oder geläutet werden, ingleichen bey den gespannten Darmsaiten, wenn sie von einem Stoß schnell hin und her schwingen, geschieht.

Anmerk. Diese Mittheilung der zitternden Bewegung geschieht von dem schallenden Körper meistentheils unmittelbar; sie kann aber auch mittelbar geschehen, indem der schallende Körper die elastischen oder auch nur harten Theilchen eines andern ihn berührenden oder umgebenden Körpers erschüttert, und diese wiederum der sie umgebenden Luft die Erschütterung mittheilen; daher hört man auch zuweilen einen schallenden Körper im Wasser, z. B. einen unter Wasser aufgehängten Wecker, und wenn das eine Ende eines langen Stabes eine gehende Uhr berührt, so kann man an dem andern Ende desselben ihren Gang sehr vernehmlich hören.

b) Durch die schnelle **Ausbreitung** der in einem engen **Raume** verschlossenen **Luft**, wie bey allen blasenden Instrumenten, den Stimmen der Menschen und Thiere, den Schießgewehren, den Peitschen, wenn die Schnur sich überschlingt und die Luft schnell zusammendrückt, dem Winde, wenn er durch enge Löcher geht, ingleichen kleinen gläsernen Kügelchen, darin eine Luftblase mit etwas Weingeist verschlossen ist, sobald dieser in einem Lichte kochend gemacht wird und das Kügelchen zersprengt, geschieht.

Anmerk. Es gehört hieher das Knallpulver, welches aus drey Theilen Salpeter, zwey Theilen Schwefel und zwey Theilen Tartarsalz besteht. Diese dreyerley Materien werden zu Pulver gestoßen, vermischt, und in einem Löffel über Kohlen gesetzt, da sie denn, sobald sie zu schmelzen angefangen, mit einem starken Knall auffliegen.

c) Durch das schnelle Eindringen der Luft in einen luftleeren Raum, wie bey luftleeren gläsernen Kugeln, oder **Glasbomben** geschieht, wenn man sie plötzlich zerbricht.

2) Der Schall **pflanzt** sich gegen alle Seiten **fort**, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, daß er in einer Secunde ohngefähr 1076 rheinländische Fuß durchläuft, daher man den Knall einer Canone oder eines Gewehrs, welches in der Ferne abgefeuert wird, oder den Donner eines entfernten Gewitters allemal viel später hört, als man den Bliz des Pulvers oder des Gewitters sieht, den man wegen der großen Geschwindigkeit des Lichts, sobald er entsteht, sehen kann.

3) Der Schall wird von festen Körpern **zurückgestoßen**, daher man denselben, wenn man von solchen Körpern, die ihn zurückstoßen, z. B. von einem Berge, gegen welchen man ruft, über 60 Fuß entfernt ist, nach einiger Zeit noch einmal hört, welches das **Echo** oder der **Wiederschall** genannt wird.

Anmerk. 1) Die Stimme eines redenden Menschen wird sehr verstärkt, wenn derselbe durch ein Sprachrohr oder große blecherne kegelförmige Röhre oder in ein Hörrohr redet. Jenes wird bey großer Entfernung des Redenden, dieses von schwer Hörenden gebraucht. In einem Zimmer verstärken selbst die Wände, wenn sie nicht behangen sind, den Schall, indem sie die gegen sie anstoßende Luft zurückstoßen, und die Schwingungen derselben erneuern. In demselben, wie auch in der Kirche, laut zu reden, ist daher leichter als in der freyen Luft. Auf eine vollkommenere Art wird bey einigen musikalischen Instrumenten durch elastische Materien, z. B. bey dem Flügel und Clavier durch den Resonanzboden der Ton verstärkt.

2) Der Unterschied der Töne in der Musik rührt von der verschiedenen Geschwindigkeit der zitternden Bewegung der Luft

Luft her. Je gröber die Anzahl der hervorgebrachten Schwingungen der Luft in einer gewissen Zeit ist, desto höher; je geringer, desto niedriger ist der Ton. Insonderheit verhält sich bey Tönen, die um eine Octav von einander entfernt sind, die Anzahl der Schwingungen, wie 1 zu 2, d. i. so oft in dem einen Ton eine Schwingung vollendet wird, so oft werden in dem um eine Octav höher liegenden Ton zwo Schwingungen vollendet. Wenn sich die Anzahl der Schwingungen bey zween Tönen, wie 2 zu 3 verhält; d. i. wenn bey dem einen Ton drey Schwingungen vollendet werden, so oft in dem andern deren zwo vollendet sind, so heißt er die Quinte von diesem. Wenn sich die Anzahl der Schwingungen zweener Töne wie 4 zu 5 verhält; so heißt der letzte die große Terz des erstern; die kleine Terz hingegen, wenn diese Anzahl sich wie 5 zu 6 verhält; u. s. w. Die gespannten Saiten geben einen desto höhern Ton, je kürzer und dünner sie sind, und je mehr sie gespannt worden, weil sie alsdenn von einem Stoße schneller hin und herschwingen. Von zwoen gleich dicken und gleich stark gespannten Saiten macht die eine so vielmal mehr Schwingungen in einerley Zeit, als die andere, so vielmal sie kürzer ist, als diese. Wenn sich demnach die Längen zweyer Saiten wie 2 zu 1 verhalten; so gibt die kürzere die nächsthöhere Octav des Tons der längern, z. B. c wenn diese c angiebt. Verhalten sich die Längen wie 3 zu 2, d. i. beträgt die kürzere $\frac{2}{3}$ der längern; so ist ihr Ton die Quinte des Tons der längern, z. B. g, wenn dieser c ist; u. s. w. Bey den blasenden Instrumenten aber ist der Ton desto höher, je enger die Oeffnung, durch welche die Luft getrieben wird, und je näher sie dem Munde ist oder gebracht wird, und je geschwinder sich die Luft durch diese Oeffnung bewegt; daher z. B. bey einer Flöte die obern Löcher hohe, die untern oder vom Munde entferntern aber tiefe Töne geben.

Das Wasser.

19. *Was ist das Wasser?

Ein flüssiger, durchsichtiger, sichtbarer Körper, welcher ohne Farbe, Geschmack und Geruch ist.

Anmerk. Das Wasser in den Seen, Flüssen und Brunnen, ist gemeiniglich so wie die Luft mit einer Menge fremder Theile, sonderlich mit irdischen und Salztheilen vermischt, welche demselben sowol eine Farbe als Geschmack und Geruch geben. Das Wasser des großen Weltmeers ist salzig und bitter.

20. Welches sind die vornehmsten besondern Eigenschaften des Wassers?

1) Die **Flüssigkeit.**

2) Die merkliche **Schwere.**

Anmerk. 1) Ein Cubikfuß Regenwasser wiegt $66\frac{1}{2}$ Pfund Cöllnisch Gewicht, eben so viel Seewasser aber 68 bis 70 Pfund.

2) Die Flüssigkeit und Schwere des Wassers verursacht, daß die Flüsse sich beständig gegen die niedrigern Gegenden der Oberfläche der Erde bewegen.

3) Die **Durchsichtigkeit**, daher man andere Körper im reinen und stillen Wasser sehen kann.

4) Der **Zusammenhang** seiner Theile in Tropfen und Blasen.

Anmerk. Die Wasserblasen entstehen sonderlich beym Kochen, in der Oberfläche desselben, von der darin befindlichen und durch die Wärme ausgedehnten Luft.

5) Die **Härte** seiner Theile, daher ein schief auf die Oberfläche des Wassers geworfener Stein von demselben wie von festen harten Körpern zurückgestoßen wird.

6) Der **Mangel** einer beträchtlichen **Elasticität**, indem es selbst durch eine große Kraft nur wenig zusammengedrückt werden kann.

Anmerk. Diese Eigenschaft des Wassers ist insonderheit durch neuere Versuche bestätigt worden, in welchen z. B. eine Kraft von 4862 Pfunden eine Menge Wassers, die einen Raum von $26\frac{3}{4}$ Cubikzollen einnahm, in einer 1 Zoll $2\frac{1}{2}$ Linie weiten Höhlung, nur um 1 Cubikzoll, d. i. ohngefähr um $\frac{1}{25}$ bis $\frac{1}{27}$ seines Raums zusammen zu pressen vermögend war.

21. Welches sind die vornehmsten **Wirkungen** des Wassers?

Es **dehnt** die Körper **aus**, in welche es eindringt, z. B. das Holz, und **löset** verschiedene, sonderlich die Salze, **auf.**

Anmerk. 1) Ein nasses Seil wird kürzer, wenn dasselbe wegen der Lage seiner Faden von den darin befindlichen Wasser-

Wassertheilen mehr in die Dicke ausgedehnt wird. Eben deswegen drehet sich ein an einem Seile oder Saite aufgehangener Körper um, nachdem das Seil oder die Saite mehr oder weniger Feuchtigkeit aus der Luft annimmt. Dieses ist der Grund der Einrichtung des Hygrometers, welches ein Werkzeug ist, daran man die Veränderungen der Nässe und Trockenheit der Luft bemerken kann.

2) Weil die meisten Körper auf der Erde aus diesen drey erklärten flüssigen Körpern und irdischen Theilen bestehen; so pflegt man das Feuer, die Luft, das Wasser und die Erde die vier Elemente zu nennen.

Das Quecksilber.

22. *Was ist das Quecksilber?

Ein flüchtiger, undurchsichtiger Körper, welcher eine Silberfarbe hat, und von sehr schwerer Art ist.

Anmerk. Das Quecksilber wird entweder gediegen in den Bergwerken gefunden, oder durch die Kunst aus Zinnober verfertigt, in welchen man es wieder durch einen Zusatz von Schwefel verwandeln kann.

23. Welches sind die vornehmsten besondern Eigenschaften des Quecksilbers?

1) Die **Feinheit** seiner Theile, indem sie in das Gold und einige andere Metalle eindringen können.

2) Die große **besondere Schwere** desselben, indem eine Menge Quecksilber 14mal schwerer ist als eine gleich große Menge Wasser. Ein Cubikfuß Quecksilber wiegt 918$\frac{8}{19}$ Pfund eöllnisch Gewicht.

Anmerk. Zu den merkwürdigen Eigenschaften des Quecksilbers gehört auch diese, daß eine merklich strenge Kälte erfordert wird, um es zum Frieren, und wiederum ein grosser Grad der Hitze, um es zum Sieden zu bringen. Zu Krasnojarsk und Irkutzk, in Sibirien, war es 1772 im December nach einer anhaltenden Kälte bey einer Tiefe im Thermometer von ohngefähr 88 fahrenheitschen Graden unter 0, oder 120 Graden unter dem Gefrierpunct, zu einer metallartigen festen Masse, die sich wie Bley zerschneiden und hämmern ließ, gefroren. Im Jahr 1780 den 4 Januar es zu Witegra, am See Onega, nachdem es eine Nacht der freyen Luft ausgesetzt worden war, ebenfalls gefroren, da das Delisliſche Thermometer 224 Grade, welche mit 57 fahrenheitschen Graden unter 0 übereinstimmen, zeigte. Bey 209 delisliſchen Graden, oder 18$\frac{4}{7}$ fahr. Gr.

unter

unter 0, war es wieder völlig flüssig. Dagegen siedet das Queckſilber erſt bey einer Hitze von 600 fahrenheitſchen Graden.

24. Welches ſind die vornehmſten Wirkungen des Queckſilbers?

Es **erweicht** die meiſten Metalle, ſonderlich das Gold, und **löſt** ihre Theile auf, weil dieſe von ſchwererer Art ſind als die Theile des Queckſilbers, und ſie daher an ſich ziehen.

Anmerk. Die übrigen flüſſigen Körper auf der Erde ſind nichts anders als Waſſer, welches mit aufgelöſten Theilen anderer Körper entweder durch die Natur, oder durch die Kunſt vermiſcht iſt, dazu gehört theils das Salzwaſſer, die Geſundbrunnen, die Säfte der Pflanzen und Thiere, ſonderlich das Blut, theils die deſtillirten Waſſer, Oele, Spiritus, Weine, Biere, u. dergl.

Die Electricität.

25. *Was iſt die Electricität?

Die Erſcheinung verſchiedener Körper, nach welcher ſie, wenn ſie gerieben werden, andere leichte Körper anziehen und zurückſtoßen, und ein Licht von ſich geben.

Anmerk. 1) Die Körper, an welchen dieſe Erſcheinung durch das Reiben hervorgebracht werden kann, werden urſprünglich electriſche Körper genannt, dazu ſonderlich das Glas, Schwefel, Pech, Siegellack, Bernſtein, die Haare der Thiere, blaue Seide, die Luft u. a. m. gehören.

2) Die eigentliche Urſach dieſer Erſcheinung wird von einigen Naturlehrern dem reinen Feuer, welches durch das Reiben aus den electriſirten Körpern hervorgebracht und in Bewegung geſetzt worden, von andern dem Aether, und von noch andern einer beſondern electriſchen Materie zugeſchrieben.

26. Was iſt von der Electricität inſonderheit zu bemerken?

1) Die **Hervorbringung** oder Erregung der Electricität geſchieht durch das **Reiben**, daher eine gläſerne Röhre oder ein Stück Bernſtein oder Lack, ſo mit einem wollenen Tuch gerieben worden, kleine Stückchen Papier, über die man dieſe Körper hält, an ſich

ziehn,

ziehn, und wenn das Reiben einer gläsernen Röhre lange genug fortgesetzt wird, so bemerkt man insonderheit zwischen derselben und dem reibenden Körper im Dunkeln ein schwaches Licht. Eben dergleichen Licht sieht man, wenn man die Haare einer Katze oder eines Pferdes im Finstern mit der Hand auf und nieder reibt.

Anmerk. Es kann, um diese Electricität bequemer hervorzubringen, eine gläserne Kugel, oder nur ein großes Bierglas, so gehörig eingefaßt und zwischen zwey eiserne Spitzen gestellt worden, an einem ledernen Küssen, oder nur an einer daran gehaltenen flachen Hand, vermittelst einer Schnur und Rades, oder auf einer Drehbank, oder auf andere Weise umgedreht und gerieben werden. Eine solche Maschine wird eine Electrisirmaschine genannt, welche zuerst von Otto von Guerike angegeben worden ist.

2) Die **Mittheilung** oder Fortpflanzung der Electricität geschieht, wenn man einem electrisirten Körper andere Körper, welche aber nur von ursprünglich electrischen Körpern berührt, und daher z. B. auf Glas, Pech oder blaue Seide gestellt seyn müssen, welches das **Isoliren** der unelectrischen Körper genannt wird, nahe bringt, da denn in denselben ebenfalls und oft noch eine viel stärkere Electricität bemerkt wird, als in den ursprünglich electrischen Körpern.

Anmerk. 1) Es kann auf diese Weise die Electricität nur solchen Körper mitgetheilt werden, welche nicht ursprünglich electrisch sind, und daher unelectrische oder Leiter heißen, dazu sonderlich die Metalle, das Wasser, die Menschen und Thiere gehören, wiewol auch bey vielen sogenannten unelectrischen Körpern sich Spuren einer ursprünglichen Electricität zeigen. Ein Werkzeug, welches dient, die Menge der mitgetheilten Electricität zu prüfen, wird ein Electrometer genannt.

2) Wenn einem electrisirten Körper ein unelectrischer, welcher aber nicht auf einem ursprünglich electrischen ruht, nahe gebracht wird z. B. wenn ein Mensch, welcher auf einem Pechkuchen steht, und seine Hand an die Kugel einer Electrisirmaschine, oder auch an einen durch dieselbe electrisirten Körper hält, von einem andern Menschen, der auf freyem Boden steht, angerührt wird: so entsteht zwischen beyden

den ein prasselnder Funke, welcher, wenn er groß genug ist, erwärmten Weingeist entzünden kann. Aus den spitzigen Ecken metallner Körper, z. B. eines Degens oder Drathes, fließen, wenn ihnen die Electricität mitgetheilt wird, von selbst leuchtende Strahlen aus.

2) Eine eiserne, zugespitzte und in einer freyen Gegend (z. B. in einem Hofe oder Garten) auf einem hohen Gegenstande, (z. B. einem Mastbaum) isolirt (z. B. in Pech) befestigte Stange, wird, sobald eine Gewitterwolke in der Nähe derselben ist, wie auch öfters zu andern Zeiten, vorzüglich bey stürmischem Wetter, electrisch, woraus man schließt, daß nicht nur die Erscheinungen beym Gewitter von einer in den Gewitterwolken aus der Luft, einem ursprünglich electrischen Körper, angehäuften Electricität, welche auch der Stange mitgetheilt wird, herrühren, sondern daß auch bey der Witterung überhaupt und deren Veränderung die Electricität mitwirke. Ein Werkzeug, welches dient, die Electricität der Luft zu jeden Zeiten zu beobachten, wird ein Luftelectricitätsmesser genannt.

3) Die **Verstärkung** der Electricität geschieht, wenn man einen Drath electrisirt, welcher in einer gläsernen Flasche, deren äußere Oberfläche mit Metall, z. B. mit Spiegelfolie, welche mit Gummi angeklebt wird, doch so belegt ist, daß die Belegung nicht an den Rand des Gefäßes reicht, und deren innerer Raum mit Wasser, Queckſilber oder Feilstaub, doch gleichfalls nicht bis an den Rand angefüllt ist, hängt, oder in der Oeffnung derselben mit Lack befestigt worden, indem ein solcher Drath einen großen knallenden Funken giebt, wenn man die äußere Belegung der Flasche mit der einen Hand anfaßt und dem Drath mit einem Finger der andern Hand nahe kommt; oder überhaupt, wenn man die äußere Belegung mit einer Kette verbindet, und deren äußerstes Ende dem electrisirten Drath nähert. Diese Flasche heißt nach ihrem Erfinder die **Kleistische**, sonst auch die **Leidensche** oder **Muschenbröckſche Verstärkungsflasche.**

Anmerk. 1) Auf eine ähnliche Art wird auch die Electricität verstärkt, wenn man eine Glasplatte, deren innere und äußere Oberflächen mit Metall, z. B. mit Spiegelfolie,

auf

auf die gedachte Art belegt sind, isolirt, z. B. an blauer Seide aufhängt, hierauf den electrisirten Draht mit der einen Belegung in Verbindung setzt, und sodann wie bey der Verstärkungsflasche verfährt.

2) Ein isolirter leichter Körper, z. B. ein an einem blauen seidenen Faden aufgehängtes Korkkügelchen, welchem von geriebenem Glase, oder einem durch dasselbe electrisirten Leiter, die Electricität mitgetheilt ist, wird von demselben, so wie von jedem andern ebenfalls durch Glas electrisirten Körper zurückgestoßen. Eben dies erfolgt bey Körpern, die durch Harz, Pech, Schwefel u. dergl. electrisirt sind. Dagegen zieht ein durch Glas electrisirter Körper den durch eine harzige Materie electrisirten Körper an, und umgekehrt. Hierauf, und auf ähnlichen andern Erscheinungen, gründet sich die Eintheilung der Electricität in Glaselectricität und Harzelectricität. Ein isolirter unelectrischer Körper, der mit geriebenem Glase und Harz zugleich in Verbindung gesetzt wird, wird gar nicht electrisch. Beyde Electricitäten werden daher entgegengesetzt genannt.

3) Ein metallner Teller, dessen eine Oberfläche mit einer ursprünglich electrischen Materie so bedeckt, z. B. mit Harz so übergossen ist, daß ein metallner Deckel, der an seidenen Schnüren aufgehoben werden kann, dieselbe mit seiner Oberfläche genau berührt, wird ein Electrophor oder beständiger Electricitätsträger genannt. Wenn der Harzkuchen gerieben und darauf mit dem Deckel belegt wird; so wird dieser durch die Berührung electrisch, und zeigt die vorhin angezeigten und andere merkwürdige Erscheinungen electrisirter Körper. Man findet den Electrophor zuweilen mehrere Tage und Wochen electrisch, ohne ihn von neuen getrieben zu haben.

Der Magnet.

27. * Was ist der Magnet?

Ein eisenhaltiger Stein, welcher das Eisen oder einen andern Stein seiner Art an sich zieht, und sich bey einer freyen Bewegung von selbst so richtet, daß die eine Seite desselben beständig gegen Mitternacht gekehrt ist.

Anmerk. 1) Die Wirkung dieser anziehenden Kraft zeigt sich bey dem Magneten mehrentheils schon in beträchtlicher Entfernung des Eisens von demselben. Wenn man Eisenfeil auf einen Tisch ausbreitet, und in einiger Entfernung über oder unter dem Tisch den Magnet hin und her bewegt,

so

so erhalten die Theilchen desselben eine aufrechte Stellung gegen den Magnet, und hierauf eine regelmäßige Lage. An den Magneten selbst hängen sie sich in Gestalt eines Büschels an, wenn er ihnen näher gebracht wird.

2) Die eigentliche Ursach dieser Erscheinung wird von einigen Naturlehrern dem Aether, von andern einer besondern magnetischen Materie zugeschrieben.

28. Was ist von dem Magneten insonderheit zu bemerken?

1) Die Kraft des Magneten, das Eisen an sich zu ziehn, wird **verstärkt**, wenn die beyden Seiten eines Magnetsteins, an welchen sich Feilstaub von Eisen, wenn er in selbigen gelegt wird, am meisten ansetzt, und welche beyde Seiten die **Pole** desselben heißen, eben schleift, an dieselben eiserne Platten mit viereckten Ansätzen, welche daher gleichfalls die Pole des Magneten genannt werden, legt, und solche durch eine Einfassung des ganzen Steins befestigt. Diese Einrichtung des Magneten wird die **Armatur** desselben, und ein Stück Eisen, welches mit seiner ebenen Fläche beyde Pole berührt, und von denselben fest gehalten wird, der **Anker** genannt.

Anmerk. 1) Derjenige Pol des Magneten, welcher bey einer freyen Lage und Bewegung desselben sich nach Mitternacht wendet, wird der Nordpol, der andere der Südpol, desselben genannt. Zween Magnete, die einander genähert werden, ziehen sich an, wenn die auf einander zutreffende Pole ungleichnamig sind, d. i. wenn der Pol des einen Magneten sein Nordpol und derjenige des andern sein Südpol ist. Treffen aber die gleichnamigen Pole auf einander, so stoßen sie sich einander zurück. Daher werden die gleichnamigen Pole zweener Magnete die feindlichen, die ungleichnamigen aber die freundschaftlichen Pole derselben genannt.

2) Wenn an dem Anker des Magneten ein Behältniß für kleine schwere Körper z. B. eine Wageschale hängend befestigt wird, und man in dieselbe täglich einige Schrotkörner, kleine Steine u. dergl. wiederholt legt, so kann die Kraft des Magneten dadurch nach und nach ansehnlich verstärkt werden.

2) Die angezeigte Eigenschaft des Magneten kann dem Eisen auf verschiedne Weise, insonderheit aber dadurch,

dadurch, daß man es mit einem Magneten, jedoch ohne Abwechselung der Pole und nicht nach entgegengesetzten Richtungen bestreicht, mitgetheilt werden. Ein dergleichen magnetisch gemachtes Eisen wird vornehmlich alsdenn, wenn es zu der Absicht, magnetische Versuche damit zu machen, eingerichtet ist, ein **künstlicher Magnet** genannt.

Anmerk. 1) In diesem Fall pflegt demselben gemeiniglich die Gestalt eines Hufeisens gegeben zu werden, dessen beyde Enden die Pole desselben sind, und zwar wird der Nordpol durch Bestreichung des einen Endes mit dem Südpol, und der Südpol durch Bestreichung des andern Endes mit dem Nordpol eines Magneten erhalten.

2) Körper von Eisen, welche eine zeitlang ruhig in einer vertikalen Stellung gestanden haben, z. B. die Stangen der Windfahnen, die Creutze auf den Thürmen, Ofengabeln, wenn sie während des Sommers im Camin gestellt sind, werden oft von selbst magnetisch. Auch wird Eisen magnetisch, wenn es gluend plötzlich im kalten Wasser abgekühlt, oder wenn es gehammert, gefeilt wird u. s. w. Dagegen verliert magnetisches Eisen durch den Rost, zuweilen auch durch den Blitz und auf andere Arten, seine Kraft.

3) Eine stählerne magnetisch gemachte Nadel, welche auf eine Spitze, die jedoch nicht von Eisen seyn muß, so gelegt ist, daß sie sich auf derselben leicht umdrehen kann, wird eine **Magnetnadel**, und mit der gehörigen Einfassung ein **Compaß** oder **Boußole** genannt. Weil sich nemlich diese Nadel, wenn nicht Eisen in ihrer Nähe ist, mit der einen Spitze beständig nach Norden wendet; so dient sie, die Lage eines Orts gegen die Weltgegenden zu bestimmen.

Anmerk. 1) Des Compasses bedienen sich die Schiffer, um den Weg auf dem Meere zu wissen, und der Boußole die Feldmesser und Markscheider bey Ausmessungen auf dem Felde und in Bergwerken.

2) Eine merkwürdige Erscheinung bey der Magnetnadel ist, daß sie nur an einigen Orten auf der Oberfläche der Erde genau nach Norden und Süden weiset, dagegen sie an andern Orten theils nach Westen theils nach Osten von der Mittagslinie abweicht, welche Erscheinung die Deklination

tion und Abweichung derselben genannt wird. In den hiesigen Gegenden hat sie eine westliche Deklination von ohngefähr 16 Graden. Doch ist diese Abweichung der Magnetnadel auch an einerley Ort zu verschiedenen Zeiten verschieden. Außerdem ist auch die Lage der Magnetnadel an den mehrsten Orten nicht horizontal, wenn sie gleich, ehe sie magnetisch gemacht wurde, eine vollkommne horizontale Lage hatte; und zwar senkt sich in den nördlichen Gegenden der Oberfläche der Erde die nordliche, in der südlichen die südliche Spitze der Nadel gegen den Horizont, welche Erscheinung die Inklination oder Neigung der Magnetnadel genannt wird. Durch den Blitz, wie auch bey der Erscheinung eines Nordlichtes pflegt zuweilen die Abweichung der Magnetnadel verändert zu werden.

Die Lufterscheinungen.

29. Was ist eine Lufterscheinung?

Eine merkliche Veränderung in der Atmosphäre der Erde.

30. *Wie können die Lufterscheinungen eingetheilt werden?

In **luftige**, **wässrige** und **feurige**. Die ersten sind Veränderungen, welche in der Luft selbst vorgehn, dergleichen die **Winde** sind. Die andern entstehen durch die darin befindlichen **wäßrigen**, und die dritten durch die **feurigen** Dünste, und durch die Electricität.

31. *Was ist der Wind?

Eine merkliche Bewegung eines Theils der Atmosphäre in eine andere Gegend derselben.

32. Welches sind die Ursachen der Winde?

Es entsteht **überhaupt** ein Wind, wenn das Gleichgewicht der Luft in einem Theil der Atmosphäre aufgehoben, oder die Luft irgendwo dichter oder dünner, oder mehr oder weniger elastisch wird, als in den umliegenden Gegenden, wodurch nothwendig eine Bewegung in einem großen Theil der Atmosphäre, und

zwar

zwar von dem Ort, wo die dichtere Luft ist, nach demjenigen, wo sie dünner ist, hervorgebracht werden muß; insonderheit kann solches geschehen 1) durch eine schnelle Veränderung der Wärme und Kälte der Luft, 2) durch die Dünste, welche in derselben aufsteigen.

33. Wie können die Winde eingetheilt werden?

1) In Ansehung der **Richtung** der bewegten Luft oder der Weltgegenden, aus welchen die Winde herkommen, werden sie in 32 Arten eingetheilt, davon die vornehmsten sind: der **Ostwind**, welcher vom Morgen oder aus der Gegend, wo die Sonne im Frühling und Herbst aufgeht, der **Südwind**, welcher vom Mittage, oder aus der Gegend, wo die Sonne bey uns im Mittage steht, der **Westwind**, welcher vom Abend, oder aus der Gegend, wo die Sonne im Frühling und Herbst untergeht, und der **Nordwind**, welcher von Mitternacht herkommt.

Anmerk. Die übrigen Winde, welche aus Gegenden herkommen, so zwischen diesen vier Hauptgegenden liegen, werden mit Namen benannt, welche aus den vier angezeigten zusammengesetzt sind. S. B. der Wind, welcher aus der Gegend zwischen Morgen und Mittag kommt, heißt der Südostwind; zwischen Mittag und Abend, Südwestwind; zwischen Abend und Mitternacht, Nordwestwind; zwischen Mitternacht und Morgen, Nordostwind.

2) In Ansehung der **Verschiedenheit** dieser **Richtung** zu verschiedenen Zeiten in **beständige** und **unbeständige Winde**. Jene sind solche, die zu gewissen Zeiten regelmäßig an einerley Ort wehen. Dahin gehören

a) Der **beständige Ostwind** in der heißen Erdzone.

Anmerk. Dieser rührt theils von der Umdrehung der Erde um ihre Axe, theils von der Erwärmung der Atmosphäre durch die senkrecht über sie hingehende Sonne her; daher derselbe in der nördlichen Hälfte der Zone nordöstlich, in

der südlichen südöstlich ist, auch nach dem verschiedenen Stande der Sonne in der Ecliptik einige Abwechselung leidet.

b) Die **Land-** und **Seewinde an den Küsten.** Jene wehen bey Tage, vorzüglich des Morgens, von dem Meere nach der Küste zu; diese bey Nacht, vorzüglich des Abends, von der Küste nach dem Meere zu.

Anmerk. Weil das feste Land von den Sonnenstrahlen schneller erwärmt wird, als das Wasser; so ist die Luft an den Küsten über dem festen Lande bey Tage ebenfalls wärmer und folglich dünner, als über dem Meere: weil aber das Wasser die einmal erhaltene Wärme länger behält, als das feste Land, so ist die Luft über dem Meere bey Nacht dünner als über dem festen Lande.

c) Die **Paßatwinde, Monsons** oder **Mussons.** Im indischen Meere, in dem heißen Erdstrich, an der östlichen Seite von Ostindien, weht gewöhnlich vom December bis zum May, ein beständiger Nordwestwind, vom Junius bis November aber ein beständiger Südostwind. Im arabischen Meere und an der westlichen Küste von Ostindien weht vom April bis zum September gewöhnlich ein Südwestwind, und vom Oktober bis zum März ein Nordostwind.

Anmerk. Die Ursache dieser Erscheinungen liegt theils in den verschiedenen Stellungen der Sonne gegen diese Gegenden nach den verschiedenen Jahreszeiten, theils in noch nicht bekannten lokalen Umständen.

3) In Ansehung der **Beschaffenheit** der bewegten Luft, in **warme** und **kalte**, ingleichen in **trockene** und **feuchte** Winde.

4) In Ansehung ihrer **Stärke**, in **gewöhnliche Winde, Sturmwinde** und **Orcane.**

Anmerk. 1) Die gewöhnlichen Winde gehen selten weiter als einige Meilen fort, und ihre Geschwindigkeit beträgt in einer Sekunde höchstens 12 Fuß, die Geschwindigkeit der Sturmwinde und Orcane aber beträgt oft 60 bis 80 und mehrere Fuß, daher sie in 24 Stunden oft über einen ganzen

ganzen Welttheil fortgehen können. Ein Werkzeug, welches dient, die Stärke des Windes zu messen, wird ein Anometer, oder Windmesser genannt.

2) Ein Wirbelwind besteht aus zween starken Winden, welche einander entgegen blasen, und daher da, wo sie zusammenstoßen, die Luft in einem Kreise herumtreiben.

34. Welches ist der vornehmste Nutzen der Winde?

Sie reinigen die Luft, bewahren dieselbe vor der Fäulniß, vermindern ihre Hitze oder auch ihre Kälte, indem sie warme oder kalte Luft aus andern Gegenden herbeyführen, trocknen die Erde, machen sie feuchte, indem sie die Wolken und dadurch den Regen allenthalben vertheilen, zerstreuen den Blumenstaub, wodurch die Pflanzen und Bäume befruchtet werden, bewegen das Wasser, daß es nicht faule, tragen die Schiffe über das Meer und treiben die Mühlen.

35. *Welches sind die vornehmsten wäßtrigen Lufterscheinungen?

Der **Nebel**, die **Wolken**, der **Thau**, der **Regen**, der **Schnee**, der **Reif** und der **Hagel**.

36. *Was ist der Nebel?

Eine Menge wäßtriger Dünste, welche in der untern Luft schweben und darin verdickt werden.

Anmerk. Diese Verdickung der Dünste geschiehet sonderlich durch die Kälte, daher man nicht nur die Dünste, welche von einem siedenden Wasser in die kältere Luft übergehn, sondern auch den Othem der Menschen und Thiere, wenn die Luft sehr kalt ist, als einen Nebel sehn kann. Es wird allemal zu einem Nebel erfordert, daß die Luft merklich kälter sey als die Erde, indem von derselben häufige Dünste aufsteigen, daher die Nebel im Sommer selten, im Winter aber häufiger und noch mehr im Herbste und Frühlinge, sonderlich des Morgens und Abends, wenn die Luft plötzlich erkaltet, die Erde mehrere Wärme hat, und sie auch länger als die Luft behält, gesehn werden.

37. *Was ist eine Wolke?

Eine Menge wäßtriger Dünste, welche in der obern Luft schweben, oder ein von der Oberfläche der Erde entfernter Nebel.

3) Ein Werkzeug, welches dient, die Menge des an einem Ort gefallenen Regens zu bestimmen, wird ein Hiermeter, oder Regenmesser genannt.

43. Welches ist der vornehmste Nutzen des Regens?

Es wird die Erde dadurch befeuchtet, erweicht und fruchtbar gemacht, die Luft von schädlichen Dünsten gereinigt, die Hitze derselben gemäßigt, weil der Regen aus der höhern kältern Luft kommt, und endlich erhalten die Menschen und Thiere dadurch entweder unmittelbar oder in Quellen und Flüssen das Wasser, dessen sie zu ihrer Erhaltung benöthigt sind.

44. Was ist der Schnee?

Eine Menge von Dünsten, welche in der Luft gefrieren, sich in weissen Flocken an einander setzen und also niederfallen.

45. Welches sind die Ursachen des Schnees?

Es entsteht derselbe, wenn eine merkliche Kälte der Luft die in derselben schwebenden wäßrigen Dünste nicht nur zusammenbringt, sondern auch in Eis verwandelt.

Anmerk. 1) Die Schneeflocken haben verschiedene Figuren, wie man sonderlich durch ein Vergrösserungsglas sehn kann, wenn man sie auf einer kalten Platte oder Glasscheibe auffängt; gemeiniglich sind dieselben sechseckigt, welche Figur den sechseckigten Salztheilen, an deren Flächen sich die gefrierenden Dünste rund herum ansetzen, zugeschrieben wird.

2) Wenn die Dünste sich bey einer mäßigen Kälte an die Oberfläche der Erde oder an Bäume, Häuser und andere kalte Körper ansetzen und alsdenn gefrieren; so entsteht dadurch der Reif, welcher daher gemeiniglich nur im Herbst und Frühling bemerkt wird. Man unterscheidet übrigens Nebelreif von gefrornem Thau, welcher ebenfalls Reif genannt wird.

46. Welches ist der vornehmste Nutzen des Schnees?

Es wird die Oberfläche der Erde nebst den darin befindlichen Kräutern und Saamenkörnern dadurch vor

vor der großen Kälte beschützt, und hernach, wenn er schmelzt, die Fruchtbarkeit des Erdreichs befördert, das Wasser in den Quellen und Flüssen vermehrt, die Luft von schädlichen Dünsten gereinigt, und die Dunkelheit der langen Winternächte vermindert.

47. *Was ist der Hagel?

Eine Menge gefrorner Regentropfen, welche in der Luft niederfallen.

48. Welches ist die Ursach des Hagels?

Es entsteht derselbe, wenn eine Wolke, indem die Dünste in derselben sich in Tropfen verwandelt, entweder durch den Wind in die obere kältere Luft geführt, oder auch durch viele salzige Dünste, dergleichen sonderlich in Gewitterwolken sind, so erkältet wird, daß die Tropfen anfangen zu gefrieren, während ihres Falles aber plötzlich wieder in warme Luft kommen, wodurch ihre Kälte, ehe sie die Wärme annehmen, nochmals so sehr vermehrt wird, daß sie völlig zu Eis werden.

Anmerk. Die obere Luft ist bey trübem Wetter, wie man auf hohen Bergen sieht, allemal voller Schnee, welcher im Herabfallen, wenn die untere Luft warm genug ist, schmelzt, und also in Regentropfen verwandelt wird. Wenn aber diese Schneetheilchen sich an einander hängen und zusammenschmelzen, ohne jedoch ganz in Wasser verwandelt zu werden, so entsteht Hagel, welcher mehr oder minder durchsichtig ist, je nachdem er im Zusammenschmelzen wärmer oder kälter gewesen. Im Winter, wenn es sehr kalt ist, hagelt es niemals, theils weil alsdenn die Dünste sogleich, ehe sie in Tropfen zusammenfließen, als Schnee herabfallen, theils weil die Kälte der untern Luft alsdenn nicht viel geringer ist, als diejenige der obern, folglich die Kälte der herabfallenden Tropfen nicht plötzlich vermehrt, sondern vielmehr nach und nach vermindert wird. Daß ein kalter Körper aber, wenn er plötzlich erwärmt wird, ehe er die Wärme annimmt, vorher noch viel kälter werde, sieht man an kaltem Wasser, welches, wenn es in freyer Luft gestanden und bald gefrieren wollen, und alsdenn in eine heiße Stube gebracht wird, in derselben wirklich in Eis verwandelt wird, welches nicht geschieht, wenn man es in ein kaltes Zimmer bringt.

49. Welches ist der Nutzen des Hagels?

Es ist derselbe zwar öfters, sonderlich wenn er sehr groß und häufig ist, den Feldfrüchten schädlich, indessen dient derselbe doch theils auch, die Hitze der untern Luft zu vermindern, theils verhindert derselbe einen Wolkenbruch und Ueberschwemmung als größere Uebel, indem er, wenn er niedergefallen ist, langsam schmelzt, und daher das Wasser nach und nach abfließen kann.

Anmerk. 1) Die wäßrigen Dünste, welche die angezeigten Lufterscheinungen verursachen, steigen am häufigsten aus dem Meere auf, und werden hernach in den Wolken durch die Winde über der ganzen Oberfläche der Erde vertheilt: sie fallen aber hierauf nicht nur in diesen Lufterscheinungen, sonderlich im Schnee und Regen, nieder; sondern sie sammlen sich auch an den Spitzen der Berge, weil diese kalt sind und den Winden im Wege stehn, und hieraus ist der Ursprung mehrerer Quellen und Flüsse zu erklären. Denn wenn diese Dünste an den Spitzen der Berge in Wasser verwandelt worden, so dringt solches in die Erde, bis es einen steinigten oder thonigten Boden erreicht, auf welchem es so lange fortgeleitet wird, bis es entweder an den Seiten oder an den Füßen der Berge von selbst hervorbricht, und Quellen giebt, oder in gegrabenen Brunnen zusammenfließt. Da aber selbst beynahe auf den Gipfeln hoher Berge zuweilen Brunnen gefunden werden z. B. auf dem Brocken oder Blocksberge, die auch selbst bey dem nicht schmelzenden Schnee beständig Wasser geben, auch viele Quellen bey der größten Dürre nicht vertrocknen: so scheint es, daß in dem Innern der Berge, auch ohne äußern Zufluß des Wassers aus den Wolken, auf noch andere Art das Wasser vieler Quellen und Brunnen entstehe; welches auch noch mehrere andere Umstände und Erfahrungen, vornehmlich das beständige Schwitzen und Tröpfeln der Seitenwände mancher bekannten großen Hölen in der Erde, zu welchen das Wasser von oben nicht eindringen kann, z. B. der Baumannshöle im Fürstenthum Blankenburg, zu bestätigen scheinen.

2) Aus den Quellen fließt das Wasser immer gegen niedrigere Orte, in der Oberfläche der Erde, und verursacht dadurch Bäche, oder wenn es theils aus mehrern Quellen, theils durch Regenwasser und geschmolzenen Schnee, theils durch den Zusammenfluß mehrerer Bäche vermehrt wird, Flüsse, welche durch Vereinigung mit andern Flüssen immer größer werden, und das feste Land so lange durchlaufen, bis

bis sie sich alle endlich wieder ins Meer ergiessen, um aus demselben aufs neue wieder in Dünsten aufzusteigen, wiewol auch von den Flüssen selbst schon und den daraus entstandenen Sümpfen oder Seen sogleich viele Dünste wieder in die Atmosphäre übergehn. Vermischen sich mit dem Wasser in den Quellen, ehe es hervorbricht, oder in Brunnen gesammlet wird, salzige und sonderlich mineralische Theile, so können daraus Gesundbrunnen entstehn. Die Stellen, an welchen Brunnen bequem anzulegen sind, kann man finden, wenn man sich des Morgens oder Abends auf die Erde legt, so daß das Gesicht gegen die aufgehende oder untergehende Sonne gerichtet ist, und alsdenn acht giebt, wo aus der Erde viele Dünste als ein Nebel aufsteigen.

3) Es können zu diesen erklärten wäßrigen Lufterscheinungen auch noch die sogenannten glänzenden gerechnet werden, dazu sonderlich die Morgen- und Abendröthen, die Höfe oder Kronen um die Sonne und den Mond, die Nebensonnen und Nebenmonde, ingleichen der Regenbogen gehören, welche ebenfalls in wäßrigen Dünsten und Reverberationen, die von der Sonne oder dem Monde erleuchtet werden, entstehn, wie in dem fünften Capitel in der Optik erklärt werden soll. Hier ist nur noch von der ebenfalls dazu gehörigen Erscheinung, wenn man sagt, die Sonne ziehe Wasser, zu bemerken, daß sie entstehe, wenn die Sonne von einer Wolke bedeckt wird, die Strahlen derselben aber hinter der Wolke durch die Dünste über dem Horizont gegen die Erde durchdringen, und diese Dünste eben so erleuchten und sichtbar machen, als den herumfliegenden Staub in einem Zimmer, in welches die Sonne nur durch eine kleine Oefnung scheinet, welchen Staub man daher auch den Sonnenstaub nennt.

50. *Welches sind die vornehmsten feurigen Lufterscheinungen?

Die Gewitter, die Nordscheine, die Feuerkugeln, Seernschnuppen und Irrlichter.

51. *Was ist ein Gewitter?

Eine dicke Wolke, in welcher sich helle Flammen entzünden, die einen starken Knall verursachen.

Anmerk. Eine solche Flamme wird ein Blitz, und der Knall, den sie verursacht, der Donner genannt.

52. Welches ist die Ursach dieser Erscheinungen eines Gewitters?

Wenn eine electrische Wolke einem unelectrischen Gegenstande, z. B. einer andern unelectrischen Wolke

oder Thurm, Baum u. dergl. nahe kommt; so entsteht aus derselben gegen diesen Gegenstand Blitz und Donner, eben so, wie ein durch die Kunst electrischer Körper einen Blitz und Knall oder Donner erregt, der desto gröſser seyn muſs, je mehr electrische Materie eine solche Wolke enthält, und in je mehrern Puncten dieselbe von einem andern unelectrischen berührt wird.

Anmerk. 1) Die Ursachen, wodurch die Gewitterwolke electrisch wird, sind noch nicht völlig bekannt, indessen trägt wahrscheinlich die Luft als ein ursprünglich electrischer Körper dazu vornehmlich bey. Das Einschlagen des Blitzes, durch welchen zugleich die schwefelichten Dünste in der Luft entzündet werden, geschieht, wenn die Wolke Körpern in der Oberfläche der Erde nahe kommt, daher dadurch feste Körper zerschmettert, Metalle geschmolzen, Häuser entzündet, Menschen und Thiere getödtet werden können. Indessen fallen dabey niemals solche Steine, die man Donnerkeile nennt, und welche zuweilen zufälliger Weise an solchen Orten gelegen, wo das Gewitter eingeschlagen hat, aus der Luft nieder. Der Schaden, den ein Gewitter anrichten kann, geschieht blos durch den Blitz, daher man sich, sobald dieser vorbey ist, vor dem Donner nicht mehr zu fürchten hat.

2) Alle über den Blitz gemachte Erfahrungen stimmen darin überein, daſs der Blitz auf seinem Wege vorzüglich durch Metall angelockt werde, und daſs er, nachdem er dasselbe ergriffen, längs demselben bis zu Ende herabgeht, auch dasselbe, wenn es von einiger Dicke ist, nicht beschädigt. Ein Gebäude kann daher vor dem Einschlagen des Blitzes gesichert werden, wenn man auf einem, oder (wenn das Gebäude lang ist, und dessen höchste hervorragende Theile z. B. Giebel, Schornstein u. dergl. mehr als 40 bis 50 Fuſs von einander entfernt sind) auf mehreren dieser Theile eine metallene $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ Zoll dicke oben zugespitzte Stange befestigt, und dieselbe mit einer andern dergleichen Stange oder Drath von der Dicke eines starken Federkiels, oder auch mit einer metallenen Platte von 4 bis 5 Zoll Breite genau und so verbindet, daſs diese von auſsen an dem Hause herab, längs dem Dach und der Mauer desselben (an welchen sie ohne Gefahr mit Krampen oder Nägeln befestigt werden können,) zur Erde, und wo möglich bis zu einem feuchten Ort reichen, der einige Schuh vom Fuſs des Hauses entfernt seyn kann. Eine dergleichen gemachte Einrichtung wird eine Blitzableitung, (Wetterableiter, Ableiter,)

leiter,) genannt, und die Erfahrung hat die Sicherheit derselben vollkommen bestätigt. Die Stücken, aus welchen der Drath, oder die metallene Platte zusammen gesetzt werden, müssen, jene durch Hülsen, worin Bley gegossen, diese durch doppeltes Falzen und Zusammenlöthen derselben genau verbunden, auch das Eisen durch einen Anstrich von Oelfarbe vor dem Rost verwahrt werden. Dergleichen Blitzableitung dient, bey einer schwachen Gewitterwolke die Gewittermaterie unmerklich abzuleiten; bey einem stärkern Gewitter aber, den Blitz, im Fall er gegen das Gebäude fährt, aufzunehmen, und von außen an dem Metall bis in die Erde unschädlich herabzuleiten. Auf eine ähnliche Art kann eine Kutsche, Regenschirm, Gezelt, Schif u. dergl. wie auch ein einzelnes Zimmer in einem Gebäude, und zwar letzteres durch Herumführung eines Draths an dessen Wänden und Herableitung desselben aus dem Fenster bis zur Erde, wider das Einschlagen des Blitzes gesichert werden.

3) Hohe freystehende Gebäude und andere dergleichen Gegenstände sind der Gefahr des Einschlagens vorzüglich ausgesetzt. Man muß daher sorgfältig vermeiden, während eines Gewitters unter einem Baum oder Thurm und dergl. Schutz zu suchen; weil diese Oerter meistentheils die gefährlichsten unter allen sind. In Städten ist man, außer einem durch einen Ableiter gesicherten Gebäude, vor dem Blitz auf der Mitte einer weder zu breiten noch zu schmalen Gasse unter freyem Himmel am meisten gesichert; auf dem freyen Felde aber in einer Entfernung von 10 bis 12 Schritten von einem hohen Baum, und zwar auf der Seite des Baums, die derjenigen entgegen steht, von welcher das Gewitter von Osten aufsteigt.

4) Die Entfernung des Gewitters kann aus der Zeit beurtheilt werden, welche zwischen dem Blitz und dem darauf folgenden Donner verfließt. Denn wenn man von dem Augenblick an, da man den Blitz sieht, 11 Secunden, oder ohngefähr 12 bis 14 Pulsschläge zählen kann, ehe der Donner gehöret wird, so muß das Gewitter auf eine halbe teutsche Meile entfernt seyn, daher die Gewitter nur dann gefährlich sind, wo Blitz und Knall sogleich auf einander folgen. Wenn die Zwischenzeiten zwischen Blitz und Donner abwechselnd bald länger, bald kürzer sind; so ist dies ein Beweis, daß entweder die Gewitterwolke von sehr großem Umfange sey, oder daß mehrere Gewitter heraufziehn.

5) Das Wetterleuchten ist entweder ein aus einer electrischen Wolke ohne Knall hervorbrechendes electrisches Licht, oder noch öfter der Wiederschein eines weit entfernten Blitzes, von welchem man den Donner nicht hören kann. Denn einen Blitz, welcher eine Viertelmeile hoch ist, kann man 22½ Meile weit sehn, und den Wiederschein

Dessel-

desselben noch weiter, den Donner aber kann man kaum auf 2 oder 3 Meilen weit hören, jedoch des Nachts, wenn alles stille ist, weiter als am Tage. Man sieht das Wetterleuchten meistentheils nur am Horizont, und zwar öfters des Nachts, als am Tage, außer bey dunklem Wetter, weil sonst das hellere Tageslicht dieses schwächere Licht, wie auch einen entlegenen Blitz unkenntlich macht. Wenn der Wind aus der Gegend kommt, wo es wetterleuchtet, folglich die leuchtende Gewitterwolke durch denselben heraufgetrieben wird, so kann man mehrentheils bald darauf auch den Donner hören.

53. Welches ist der vornehmste Nutzen der Gewitter?

Sie vermindern die Hitze der Luft und verbrennen die in derselben befindlichen öligten und schwefelichten Dünste, welche den lebendigen Geschöpfen schädlich sind, aber, indem sie im Regen niederfallen, die Fruchtbarkeit des Erdreichs befördern.

54. *Was ist ein Nordlicht oder Nordschein?

Ein heller Schein, welcher an dem Himmel, über dem nordlichen Horizont, zur Nachtzeit bey heiterm Wetter in der höchsten Luft gesehn wird.

55. Welches ist die Ursach eines Nordscheins?

Es scheint derselbe von den feinsten feurigen Dünsten zu entstehn, welche aus den nordlichen Gegenden der Erde aufsteigen, sich in der höchsten Luft sammlen und daselbst auf eine ähnliche Weise, als die Blitze in der untern Luft entzünden.

Anmerk. 1) Es pflegen sich bey einem Nordscheine, wenn derselben vollständig ist, folgende besondere Erscheinungen zu ereignen. Es erscheint über dem nordlichen Horizont eine dunkle Wolke, welche wie ein Stück von einem vollkommenen Cirkul über den Horizont hervorragt und der dunkle Abschnitt genannt wird. Diesen umgiebt ein weisliches Licht, welches der helle Bogen heißt. Aus dem obern Rande des dunkeln Abschnitts steigen zuweilen helle Säulen und Strahlen auf, welche oberwärts eine gelbliche oder röthliche Feuerfarbe bekommen und oben am Himmel weiße, blaue, grüne und purpurfarbene durchsichtige Wolken bilden, welche man die Krone des Nordlichts nennet. Oftmals wird auch der ganze Himmel von einem zitternden und sich wellenförmig bewegenden Glanz bedeckt.

2) Die

2) Die Nordlichter werden in Schweden und andern nordlichen Ländern im Winter fast alle Nächte hindurch bemerkt, bey uns aber seltener und gemeiniglich nur im Herbst und Frühling, jedoch in den nordlichen Gegenden Deutschlands häufiger als in den mittlern und südlichen Gegenden gesehen.

56. Welches ist der bekannte Nutzen der Nordlichter?

Sie erleuchten die langen Nächte in den nordlichen Gegenden so sehr, daß man bey denselben alle Geschäfte wie am Tage verrichten kann.

57. *Was sind die Feuerkugeln, fliegende Drachen und Sternschnuppen?

Es sind öligte und harzige Dünste, welche sich in der höchsten Luft in einen schleimigten Klumpen sammlen, durch eine innere Bewegung entzünden, hierauf leuchtend niederfallen, und in den wäßrigen Dünsten der untern Luft verlöschen.

Anmerk. Es wird daher an solchen Orten, wo eine Sternschnuppe niedergefallen ist, ein zäher, klebrigter, weißgelblicher oder bräunlicher Schleim gefunden. Die Feuerkugeln, welche von den Sternschnuppen nur durch ihre Größe und runde Figur unterschieden zu seyn scheinen, pflegen einen langen feurigen Schweif nach sich zu ziehn, daher man sie auch fliegende Drachen nennt, in der untern Luft aber mit einem starken Knalle auseinander zu fahren.

58. Was sind die Irlichter oder Irwische?

Es sind öligte und harzige Dünste, welche an sumpfigen Orten aus verfaulten Pflanzen und Thieren am Tage aufsteigen, des Nachts aber durch die Kälte in schleimige Klumpen verdickt werden, welche sich entzünden, und durch jede Bewegung der Luft über der Erde herumgetrieben werden.

Anmerk. 1) Die feurigen Dünste sammlen und entzünden sich oft in großen unterirdischen Höhlen und verursachen dadurch theils die Erdbeben, wenn sie durch ihre ausdehnende Kraft die Oberfläche der Erde erschüttern, theils die feuerspeyenden Berge, wenn sie aus Bergen in Flammen hervorbrechen; dergleichen Berge sind der Vesuv in Italien, Aetna

Aetna in Sicilien, und sehr viele andere Berge auf der Oberfläche der Erde.

2) Zu der Naturlehre gehört als ein besonderer Theil derselben auch die physikalische Geographie, oder die Wissenschaft von der natürlichen Beschaffenheit der Oberfläche und des Innern der Erde. Außer demjenigen, was im Vorhergehenden aus derselben schon hin und wieder angeführt worden ist, wird mehreres davon im achten Capitel vorgetragen werden. Da indessen im vorhergehenden der Ebbe und Fluth des Meers als einer Wirkung der anziehenden Kraft des Mondes gedacht worden ist; so sollen hier noch die vornehmsten besondern Umstände dieser Erscheinung angeführt werden. Es besteht dieselbe überhaupt darin, daß das Wasser der großen Weltmeere, insonderheit im heißen Erdstrich, ohngefähr innerhalb 24 Stunden und 49 Minuten zweymal an jedem Orte bis zu einer gewissen Höhe steigt, und in der Zwischenzeit, folglich wiederum zweymal, bis zu einer gewissen Tiefe fällt. Jene Erscheinung wird die Fluth, diese die Ebbe genannt. Zur Zeit der Fluth bildet nemlich das Wasser über den Horizont des Orts mitten auf dem Meere gleichsam einen Wasserberg, zur Zeit der Ebbe ein Wasserthal. An den Küsten bemerkt man diese Veränderung der Höhe des Wassers dadurch, daß es zur Zeit der Fluth gegen die Ufer zufließt, zur Zeit der Ebbe aber sich von den Ufern entfernt. Das Steigen sowohl als das Fallen des Wassers erfolgt allmählig, die größte Höhe erreicht dasselbe ohngefähr 6 Stunden 12 Minuten nach der Zeit, in welcher es die größte Tiefe hatte, und umgekehrt, d. i. Ebbe und Fluth folgen an jedem Orte ohngefähr von 6 zu 6 Stunden, wechselsweise auf einander. Ferner erfolgt die größte Höhe der Fluth an jedem Orte gewöhnlich 2 bis 3 Stunden nach der Zeit, in welcher der Mond über oder unter dem Horizont des Orts durch den Mittagskreis gegangen ist, und also in dem letzten Fall seine größte Tiefe unter, und im ersten seine größte Höhe über den Horizont erreicht hat. Der Mond geht nemlich an jedem Orte ebenfalls ohngefähr innerhalb 24 Stunden und 49 Minuten durch den Mittagskreis, und ist in der Hälfte dieser Zeit in demselben Mittagskreise unter dem Horizont. Auch folgt das Wasser in seiner Bewegung dem Monde so, daß die Fluth von Osten her eintritt, und demnächst das Wasser nach Westen zu abfließt. Zur Zeit der Erdnähe des Mondes, wie auch zu den Zeiten des Neu- und Vollmonds, und noch mehr, wenn jene Zeit mit einer dieser beyden Zeiten, vorzüglich mit der Zeit des Neumonds, zusammentrift, ist die Fluth stärker, als gewöhnlich; zur Zeit der Viertel und der Erdferne ist dagegen die Fluth schwächer: am größten ist sie, wenn die Zeit der Erdnähe und die Zeit des Neu- oder Vollmonds um die Zeit der Nachtgleichen eintrift. Aus allen diesen Umständen wird mit Recht geschlossen, daß die anziehende Kraft des Mondes die Ursache dieser Erscheinung sey, und daß

diese

diese zu den Zeiten der gröſsern Fluth durch die anziehende Kraft der Sonne, deren Mittelpunct im Neu- und Vollmonde, insonderheit wenn diese zur Zeit der Nachtgleichen sich ereignen, wie auch zur Zeit der Finsternisse, mit den Mittelpuncten der Erde und des Mondes ohngefähr in gerader Linie liegt, verstärkt werde. Im Mittagskreise hat der Mond, insonderheit in den südlichen Gegenden, bald beynahe, bald völlig eine vertikale Stellung über jeden Ort, daher alsdenn seine anziehende Kraft am wirksamsten ist. Die Verspätung der höchsten Fluth nach dem Durchgange des Mondes durch den Mittagskreis des Orts rührt von der Umdrehung der Erde um ihre Axe her. Die Höhe, zu welcher das Wasser zur Zeit der Fluth erhoben wird, ist zu einerley Zeit an verschiedenen Orten, so wie nach dem vorhergehenden an einerley Ort zu verschiedenen Zeiten verschieden. Im Südmeere beträgt diese Höhe zwischen 6 und 15 Fuß, die mittlere Höhe ist ohngefähr 11 Fuß. Uebrigens rühren scheinbare Unregelmäſsigkeiten dieser Erscheinungen an einigen Orten von Nebenumständen her, zu welchen insonderheit die Lage des festen Landes und der Inseln gegen das Meer, der geringe Umfang des Gewässers, und die beträchtliche Entfernung desselben von der mittleren Zone der Erde gehören.

59. Welches sind die vornehmsten Witterungsregeln oder Anzeigen von bevorstehenden Veränderungen des Wetters?

I. In Ansehung der Beschaffenheit des Wetters auf einzelne Tage können die Veränderungen desselben beurtheilet werden

a) Aus dem Steigen und Fallen des Quecksilbers im Barometer. Denn wenn dasselbe steigt, sonderlich einige Tage nach einander, ohne dazwischen zu fallen, so pflegt es gutes Wetter zu werden: fällt es aber, sonderlich einige Tage nach einander, ohne dazwischen zu steigen; so kommt Regen oder Wind, und wenn es sehr niedrig stehet, langwieriger Regen oder Sturmwind: steigt und fällt es wechselsweise, so ändert sich das Wetter oft. Wenn im Sommer an einem warmen Tage das

Queckſilber zu fallen anfängt; ſo pflegt gewöhnlich ein Gewitter zu erfolgen.

b) Aus den **Winden**, dazu inſonderheit folgende Regeln gehören.

1) Der **Nordwind** und **Oſtwind** bringt kalte, der **Südwind** warme, der **Weſt-** und **Südweſtwind** feuchte Witterung, und Regen.

2) Beym **Oſt-** und **Nordoſtwinde** iſt im Winter die gröſte Kälte, beym **Nordweſtwinde** pflegt heiteres Wetter zu erfolgen, beym Nordwinde hingegen regnets im Sommer und ſchneyets im Winter.

3) Wenn der **Wind der Sonne folgt**, das iſt, wenn des Nachts Nordwind, des Morgens Oſtwind u. ſ. w. weht, welches ein **Sonnenganswind** heißt, ſo bleibt es einige Tage hindurch gutes Wetter.

4) Wenn **Südoſtwind** weht, die Wolken aber von Südweſt quer über ziehn; ſo hält dieſer Wind lange an und endet ſich mit Regen. Der Südoſtwind pflegt auch Gewitter zu bringen.

5) Ein **Sturmwind**, welcher in der Nacht anfängt, iſt nicht ſo heftig und langwierig als einer, der bey Tage anfängt.

6) Wenn ſich bey warmer Luft ein Wind aufmacht, ſo erfolgt bald Regen.

Anmerk. Die mehrſten der hier angeführten Witterungsanzeigen aus den Winden gelten nur für hieſige Gegenden; dagegen an andern Orten, nach deren verſchiedenen Lage gegen groſe Meere, hohe Gebürge u. dergl. die Winde oft ganz entgegengeſetzte Einflüſſe auf die Witterung haben.

c) Aus den **Wolken** und einigen andern Lufterſcheinungen, dazu wieder folgende Regeln gehören.

1) Die **Morgenröthe** zeigt an, daß Wind oder Regen denſelben Tag erfolgen werde; die **Abend-**

röthe

röthe aber, daß den folgenden Tag schönes helles Wetter seyn werde, außer wenn sie kupferfarbig ist, da denn schlecht Wetter kommt.

Anmerk. Die Morgen- und Abendröthen sind gleichsam die äußersten Gränzen einer großen Menge von Wolken, welche eine ganze Gegend bedecken, und um welche ringsherum die Luft öfters über 100 Meilen weit helle ist. Wenn man also eine Morgenröthe sieht; so ist solches ein sicheres Zeichen, daß eine ganze Menge Wolken vom Westmeer her über den Horizont heraufziehe, folglich ein trüber Tag seyn werde. Wenn man aber eine Abendröthe sieht; so ist solches eine Anzeige, daß eine solche Menge Wolken über den Horizont gegen Osten wegziehe, folglich den andern Tag gewiß heiteres Wetter seyn werde.

2) Wenn die Sonne des **Morgens** klar und ohne ungewöhnliche Farbe aufgeht, oder bald nach ihrem Aufgange das Gewölke vor sich vertreibt, oder keine Wolken gegen über in Westen hat; so bleibt es denselben Tag klares Wetter.

3) Wenn die Sonne des **Abends** klar und ohne ungewöhnliche Farbe untergeht; so ist den andern Tag gewiß gutes Wetter, sonderlich wenn eine schöne Abendröthe darauf folgt.

4) Wenn die Sonne hinter dicken Wolken, über welche sie ihre Strahlen ausbreitet, oder mit einer dunkelrothen Farbe auf- oder untergeht; so erfolgt bald Wind oder Regen.

5) Wenn sich die Wolken am Tage stark um die Sonne herum häufen oder sich unter derselben zusammenziehn, wovon man sagt, daß die Sonne unter sich **bette**; so entsteht ungestümes Wetter.

6) Wenn es Vormittags heiter ist, des Nachmittags aber ein Reguguß kommt oder ein schwarzer Wolkenhaufen von Norden aufsteigt und den ganzen Himmel bedeckt, aber wieder fortgeführt

tet wird, ehe die Sonne untergeht; so wehet den folgenden Tag Nordwind.

7) Wenn es den Tag hindurch wolkigt gewesen ist, des Abends aber an einer Seite des Himmels sich eine helle Oefnung zeigt, welche offen bleibt; so kommt den folgenden Tag der Wind von derselben Seite her: geht aber diese Oefnung nach einiger Zeit wieder zu, so bläst der Wind gegen dieselbe Seite.

8) Wenn des Morgens ein Nebel entsteht und derselbe bald wieder fällt, so wird gegen Mittag schön Wetter: steigt derselbe aber in die Höhe, so wirds trübe oder der Nebel kommt bald in Regen wieder.

9) Wenn des Abends viele kleine schwarze Wolken am Himmel sind, so bedeutets Regen: sind sie aber weiß und helle, so kommt schönes Wetter.

10) Wenn eine dicke Wolke am Horizont sich oberwärts in helle Streiffen ausbreitet, welche Erscheinung man einen **Wetterbaum** oder **Windwurzel** nennet; so kommt bald darauf der Wind aus derselben Gegend, wo der Wetterbaum steht.

11) Wenn gegen der Sonne über ein heller Schein am Himmel, wie der Fuß eines Regenbogens gesehen wird, welche Erscheinung man eine **Windgalle** nennet, so erfolgt bald ein Sturm.

12) Die Wolken, welche wie große **weiße** Berge oder Schneehaufen aussehn, **verkündigen** helles Wetter, die **schwarzen** und **bleyfarbigen**, sonderlich wenn sie niedrig stehn, Regen, und die **feuerrothen** Wind. Der Regen ist desto anhaltender, je langsamer er anfängt.

13) Die **schwarzen** oder **weißen** und **lichtgrauen Gewitterwolken** sind nicht so gefährlich

als

als die **rothen** und **braunen**, obgleich bey den erstern der Donner stärker zu seyn pflegt, ingleichen pflegt der **gelbe** und **röthliche Blitz** öfter einzuschlagen als der **weißliche**.

14) Wenn die **Sonnenstrahlen** des Morgens in den Dünsten gesehen werden können, so erfolgt Westwind: geschieht dieses des Abends, so erfolgt Ostwind.

15) Wenn die **Sterne** dunkel scheinen und die kleinern gar nicht gesehen werden können, obgleich keine Wolken am Himmel sind; so wirds trübes Wetter: scheinen sie aber in Winternächten sehr helle, so entsteht große Kälte.

16) Ein **Hof** um die Sonne oder den Mond verkündigt trübes Wetter oder Wind.

17) Die **Nebensonnen** oder **Nebenmonde** zeigen anhaltendes ungestümes Wetter an.

18) Wenn die Berge wie mit einem **Rauche** bedeckt scheinen, so kommt Regen oder Wind.

d) Aus den **Empfindungen** und Betragen verschiedener Menschen und Thiere.

1) Wenn im Sommer eine **schwule** Luft, das ist, eine abmattende Wärme empfunden wird; so ist ein Gewitter zu vermuthen.

2) Wenn in **erfrornen**, **verrenkten** oder sonst **beschädigten Gliedmassen** ein starkes Jucken oder Reißen empfunden wird; so ändert sich das Wetter.

3) Wenn die **Hände** sehr trocken und glatt werden, daß alles, was man anfasset, gleichsam aus denselben glitschet; so erfolgt gewiß Regen.

4) Wenn die **Zähne** viel krähen, die **Schwalben** niedrig in der Erde fliegen, oder die

Pfauen, Gänse, Raben und Frösche stark schreyen; so pflegt bald Regen zu kommen.

5) Wenn die Bienen des Abends spät und eifrig tragen, oder auch, wenn sie am Tage nicht weit ausfliegen, so kommt Regen; wenn sie schnell fliegen und leicht stechen, so erfolgt bald ein Gewitter; wenn die jungen Schwärme vielen Vorrath aus den Mutterstöcken mitnehmen, so steht ein anhaltender Regen bevor.

6) Wenn die Schaafe des Abends noch auf Berge und Anhöhen laufen, und auf denselben herumspringen; so kommt anhaltendes heiteres Wetter.

Anmerk. Die Mondwechsel, so wie überhaupt die verschiedenen Stellungen des Mondes gegen die Erde und Sonne tragen vornehmlich zu solchen Veränderungen der Witterung bey, welche auf einem großen Theil der Oberfläche der Erde allgemein zugleich bemerkt werden. Sehr merkliche Veränderungen in der Witterung erfolgen insonderheit, wenn um die Zeit des Neumonds der Mond in der Erdnähe sich befindet, und zwar im Winter noch häufiger als im Sommer, indem im Winter die Sonne gleichfalls der Erde näher ist. Die mehresten Stürme im Frühjahr und Herbst erfolgen gemeiniglich ebenfalls um diese Zeit. Um die Zeit der Erdferne des Mondes, insonderheit wenn sie in die Zeit der Viertel fällt, erfolgt häufiger gutes Wetter. Endlich erfolgt auch gemeiniglich eine Veränderung in der Witterung um die Zeit, da der Mond sich im aufsteigenden oder niedersteigenden Knoten befindet, (welches im Calender durch die Zeichen ☊ und ☋ angedeutet wird,) zumal wenn sie in die Zeit eines Mondwechsels trift. Diese Veränderungen rühren ohne Zweifel von der anziehenden Kraft des Mondes her, welche auf die Atmosphäre auf eine ähnliche Art, wie auf die großen Weltmeere, wirken muß.

II. In Ansehung ganzer Jahreszeiten, dazu folgende Regeln gehören.

1) Wenn vor Weynachten keine Kälte kommt oder auch der Februar warm ist; so pflegt es gegen Ostern noch sehr kalt zu seyn.

2) Wenn

2) Wenn der **Winter** kalt ist, und in demselben viel Schnee fällt, das Frühjahr warm, und dabey der **März** trocken, der **April** feuchte, der **May** kühle, aber ohne Nachtfröste ist, und im **Junius** genug warmer Regen kommt: so pflegt in demselben Jahre eine sehr gute Ernte zu seyn. Wenn im Winter der Schnee zu schnell schmelzt, und, ehe das Wasser sich verzieht, wieder Frost einfällt, so erfolgt gemeiniglich Miswachs.

3) Wenn im **Herbst** und **Winter** viele starke Winde sind: so pflegen die Obstbäume im folgenden Jahr besser zu tragen.

4) Wenn im **Frühjahre** Ueberschwemmungen sind, und das Grundwasser häufig hervortritt: so kommt in dem folgenden Sommer eine außerordentliche Hitze und eine Menge Ungeziefer.

5) Wenn im **Frühjahr** viele Nebel sind, so kommt im Sommer viel Regen; sind im **Herbst** viele Nebel, so kommt im Winter viel Schnee.

6) Wenn um die Herbstnachtgleichen gutes Wetter ist; so pflegt ein angenehmer Herbst zu folgen.

7) Nach einem warmen und nassen **Herbst** folgt gemeiniglich ein strenger und langer Winter.

8) Die mehresten Gewitter pflegen den ganzen Sommer hindurch aus der Gegend zu kommen, aus welcher das erste gekommen ist.

9) Wenn im Herbst die Blätter spät abfallen; so pflegt ein nasser und rauher Winter zu erfolgen.

10) Auf einen trocknen Winter pflegt ein kaltes Frühjahr; auf einen nassen Frühling und Sommer ein heitrer Herbst; auf einen heiteren Herbst ein nasses Frühjahr zu folgen.

11) Wenn im Herbst die Kraniche und andere Strichvögel früh eitig zu ziehn anfangen; so ist bald strenge Kälte zu erwarten.

Anmerk. Die Wissenschaft von den Witterungsveränderungen und Lufterscheinungen oder Meteoren wird die Meteorologie, und die Werkzeuge, welche dergleichen Veränderungen anzeigen oder bestimmen, werden meteorologische genannt. Dazu gehören insonderheit das Barometer, Thermometer, Hygrometer, Hietometer, Manometer, Luft- und Regenelectricitätsmesser und die Windfahne. Wenn man die täglichen Veränderungen, die an diesen Werkzeugen bemerkt werden, und zugleich die Veränderungen in der Gestalt des Himmels zu gewissen Zeiten des Tages, wie auch andere sich ereignende Lufterscheinungen beobachtet: so stellt man Witterungsbeobachtungen an, deren Aufzeichnung für die Meteorologie sehr vortheilhaft ist. Auch ist es schon sehr nützlich, wenn man in Ermangelung mehrerer oder aller vorhin genannten Werkzeuge täglich zu gewissen Zeiten, insonderheit des Morgens, Nachmittags und Abends die beobachtete Witterung aufzeichnet. Dahin gehört, daß man anmerke, ob der Himmel ganz bezogen, oder mehr oder weniger gebrochen bewölkt oder heiter ist, ob der Wind stark oder schwach ist, und aus welcher Gegend er kommt, ob und zu welcher Zeit es viel oder wenig geregnet, geschneyet oder gehaget habe, u. dergl. wie auch, daß man die übrigen sich ereignenden Lufterscheinungen nebst den dabey beobachteten besondern Umständen, z. B. die Gewitter, deren Stärke, Dauer und Richtung ꝛc. Nebel, Nordschein, Feuerkugeln u. dergl. nebst dem erfolgten Einfluß der Witterung in die Fruchtbarkeit der Felder und Gärten anmerke.

Das dritte Capitel.

Von der Ausmessung der Größen in der Körperwelt; insonderheit von der Arithmetik.

F. *Wie heißt die Wissenschaft, welche von der Ausmessung der Größen handelt?

Die Mathematik.

Anmerk. Was der Vermehrung oder Verminderung fähig ist, heißt eine Größe z. B. eine Länge, eine Kugel, die Zeit, eine Kraft, das Bild im Spiegel, der Schatten, der Raum ꝛc. sind Größen. Eine Größe wird durch eine andere ausgemessen, wenn man untersucht, wie oft diese oder einer ihrer Theile in derselben enthalten ist. Die Größe, mit welcher gemessen wird, heißt daher das Maaß oder die Einheit. Dergleichen sind die Elle, ein Pfund, eine Stunde ꝛc. Das Maaß muß mit der zu messenden Größe von einerley Art seyn. Z. B. das Maaß einer Länge muß eine Länge, das Maaß einer Kugel muß gleichfalls ein Körper, das Maaß einer Zeit muß wiederum eine Zeit seyn, u. s. w.

F. Welches sind die vornehmsten Theile derselben, und die besondern dazu gehörigen Wissenschaften?

1) Die **reine Mathematik**, welche von Ausmessung der Größe überhaupt ohne Rücksicht auf die in der Körperwelt vorkommenden Größenmessungen handelt. Zu derselben gehören die **Arithmetik** oder **Rechenkunst**; die **Geometrie** oder **Feldmeßkunst**; die **Trigonometrie** und die **Analysis**.

2) Die **angewandte Mathematik**, welche die Anwendung der reinen Mathematik auf die in der Körperwelt vorhandenen Größen enthält. Zu derselben gehören vornehmlich: die **mechanischen** Wissenschaften, welche von der Bewegung, die **optischen** Wis-

senschaften, welche von dem Licht, und die **astronomischen Wissenschaften**, welche von den Weltkörpern handeln. Außer diesen wird zu der angewandten Mathematik gemeiniglich auch die **Architectur**, oder Baukunst, dazu auch die **Fortification** und **Artillerie** gehören, gerechnet.

3 *Was ist die Arithmetik?

Eine Wissenschaft von den Zahlen.

4. Was ist eine Zahl?

Ein Begriff von der Größe einer Menge von Dingen einerley Art, das ist, bey denen man nur auf dasjenige siehet, was sie mit einander gemein haben.

Anmerk. Es können daher Dinge, die verschieden sind, nicht anders gezählt werden, oder man kann sich nicht eher einen Begriff von der Größe ihrer Menge machen, als bis man sie unter einerley Art oder einen allgemeinen Namen bringet. Z. B. Eine Menge von Hünern, Tauben, Enten, Gänsen ꝛc. in einem Hofe lassen sich nicht anders zusammenzählen, als wenn man fragt, wie viel Stück Federvieh oder Geflügel es sind? Jedes einzelne Stück in einer solchen Menge von Dingen wird in Rücksicht des allgemeinen Namens derselben die Einheit genennet.

5. Wie können die Zahlen eingetheilt werden?

1) In **ganze** und **gebrochene** Zahlen oder Brüche. Die ersten beziehen sich auf eine Einheit, die als ein Ganzes betrachtet wird, die andern aber auf eine Einheit, welche man sich als einen Theil eines Ganzen vorstellt.

Z. B. Wenn man sagt: Drey Thaler, so ist solches eine ganze Zahl, und die Einheit, auf welche sie sich beziehet, ist ein Thaler; sagt man aber Zwey Drittel Thaler, so ist solches ein Bruch; denn man stellt sich dabey nur zwey gleiche Theile vor, deren drey erst einen ganzen Thaler ausmachen. Hier ist der dritte Theil eines Thalers die Einheit.

Anmerk. 1) Die gebrochnen Zahlen können also zu ganzen Zahlen werden, wenn man die Theile der Einheit, auf welche sie sich beziehen, für sich als Ganze betrachtet. Z. B. Sieben vier und zwanzigstel Thaler ist eine gebrochene Zahl; nennt man aber den vier und zwanzigsten Theil

eines

eines Thalers, wie es gewöhnlich ist, einen Groschen, und sieht diesen für sich als ein Ganzes an: so heißt die gedachte Zahl sieben Groschen, und ist eine ganze Zahl.

4) Umgekehrt können die ganzen Zahlen zu gebrochnen werden, wenn man anstatt der Einheit, die als ein Ganzes betrachtet wird, einen der gleichen Theile derselben zur Einheit annimmt. Z. B. wenn man den dritten Theil eines Thalers zur Einheit annimmt, so sind Drey Drittel Thaler so viel als Ein Thaler, Sechs Drittel Thaler sind zwey, Neun Drittel Thaler sind Drey Thaler u. s. w. Eben so sind z. B. Drey Ganze so viel als Dreyßig Zehntel, oder Dreyhundert Hundertel, oder Dreytausend Tausendtel u. s. w. die Einheit sey welche man will.

2) In **benannte** und **unbenannte** Zahlen. Bey den ersten werden die Dinge, die man zählt, selbst genannt, bey den andern nicht.

Z. B. Drey Thaler ist eine benannte, drey aber eine unbenannte Zahl.

Anmerk. Es können die Zahlen noch auf verschiedene andere Weisen eingetheilt werden. Z. B. in gerade Zahlen, welche sich in zwey gleiche Hälften theilen lassen, deren jede durch ganze Zahlen ausgedruckt werden kann, und in ungerade, bey welchen dieses nicht ist.

6. Welches sind die Zeichen der Zahlen?

Eine jede Zahl kann nicht nur, wie ein anderer Begriff, durch ein ausgesprochenes oder geschriebenes Wort, sondern auch im Schreiben noch durch besondere Zeichen ausgedruckt werden. Diese Zeichen der Zahlen sind bey allen europäischen Völkern folgende:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Null.

Anmerk. Diese Zeichen der Zahlen werden Ziffern, oder schlechthin Zahlen genannt. Die meisten alten Völker bedienten sich zur Bezeichnung der Zahlen ihrer Buchstaben; die alten Römer aber hatten folgende Zeichen, denen die neuern beygefügt sind:

I. 1, II. 2, III. 3, IV. 4, V. 5, VI. 6, VII. 7, VIII. (IIX.) 8, VIIII. (IX.) 9, X. 10, XI. 11, XXXX. (XL.) 40. L. 50, LX. 60, LXXXX. (XC.) 90, C. 100. D. 500. DC. 600. M. 1000. MDCCLXV. 1765. MDCCLXXXII. 1782.

7. Was

7. Was iſt von der Bedeutung dieſer Zeichen der Zahlen oder Ziffern zu bemerken?

Es kann dieſelbe theils aus ihren vorhin gegebenen **Figuren**, denen die Wörter, durch welche dieſelbe ausgeſprochen werden, ſogleich beygeſetzt worden, theils aus ihren **Stellen** in einer ganzen Reihe Ziffern, erkannt werden. Von dem letztern ſind inſonderheit folgende Regeln zu bemerken:

1) Eine Ziffer, welche allein ſteht, oder in einer ganzen Reihe die **erſte** Stelle gegen der rechten Hand über einnimmt, bedeutet einzelne Einheiten, welche daher **Einer** genannt werden.

Z. B. 5 bedeutet, da ſie allein ſteht, fünf einzelne Einheiten, und wenn dieſe z. B. Ellen ſind, ſo bedeutet ſie fünf Ellen. Eben ſo bedeutet in der folgenden Reihe Ziffern

4397685

die 5 nichts mehr als fünfe, oder fünf Einer, und wenn z. B. die ganze Reihe Ziffern eine Menge von Ellen anzeigt; ſo bedeutet die 5 wiederum fünf Ellen.

2) Eine Ziffer, welche in einer ſolchen Reihe die **zweyte** Stelle von der Rechten zur Linken einnimmt, bedeutet zehnmal ſo viel Einheiten, als in der erſten Stelle, oder ſie bedeutet **Zehner**.

Z. B. die 8 in der obigen Reihe Ziffern, welche, wenn ſie in der erſten Stelle ſtünde, nichts mehr als acht Einer, z. B. acht Ellen bedeuten würde, bedeutet jetzt, da ſie in der zweyten Stelle ſteht, zehnmal acht, oder achtzig.

3) Eine Ziffer in der **dritten** Stelle bedeutet wieder zehnmal ſo viel Einheiten, als ſie in der zweyten Stelle bedeutet haben würde, oder ſie bedeutet **Hunderte**.

Z. B. die 6, welche, wenn ſie in der erſten Stelle ſtünde, nichts mehr als 6 Einer, z. B. ſechs Ellen, in der zweyten aber 6 Zehner d. i. zehnmahl ſechs oder ſechzig Einer bedeuten würde, bedeutet jetzt, da ſie in der dritten Stelle ſteht, zehnmal ſechzig oder ſechshundert.

4) Eine

4) Eine Ziffer in der **vierten** Stelle bedeutet wieder zehnmal so viel Einheiten, als sie in der dritten Stelle bedeutet haben würde, oder sie bedeutet **Tausende.**

Z. B. die 7, welche in der dritten Stelle nur siebenhundert bedeuten würde, bedeutet jetzt zehnmal siebenhundert oder siebentausend.

5) Eine Ziffer in der **fünften** Stelle bedeutet zehnmal Tausend, oder Zehner von Tausenden, d. i. **Zehntausende**, eine Ziffer in der **sechsten** Stelle bedeutet Hunderte von Tausenden, oder **Hunderttausende**, eine Ziffer in der **siebenten** Stelle bedeutet Tausende von Tausenden, oder tausendmal Tausende, oder **Millionen.**

Z. B. in der obigen Reihe Ziffern bedeutet die 9 zehnmal neun oder neunzigtausend; die 3 bedeutet dreyhundert tausend; die 4 bedeutet vier Millionen.

6) Die Ziffern in der **achten** und den folgenden Stellen bis an die dreyzehnte bedeuten nach der Reihe Zehner von Millionen oder **Zehnmillionen**, Hunderte von Millionen oder **Hundertmillionen**, Tausende von Millionen oder **Tausendmillionen**, Zehntausende von Millionen oder **Zehntausendmillionen**, Hunderttausende von Millionen oder **Hunderttausendmillionen**, so daß also die vorigen Benennungen beybehalten werden, und nur das Wort Millionen hinzugesetzt wird. Die Ziffern in der **dreyzehnten** und folgenden Stellen bedeuten nach der Reihe: **Billionen**, welches so viel ist als Tausendmaltausend Millionen, **Zehnbillionen**, **Hundertbillionen** u. s. w. Die Ziffern in der **neunzehnten** Stelle bedeuten **Trillionen**, in der fünf und zwanzigsten **Quadrillionen** u. s. w.

und

und es ist leicht, das bisher gesagte auf die dazwischen fallende Stellen anzuwenden.

7) Ueberhaupt bedeutet eine jede Ziffer zehnmal **mehr**, wenn sie um eine Stelle, zehnmal zehn- oder hundertmal mehr, wenn sie um zwey Stellen, zehnmal hundert- oder tausendmal mehr, wenn sie um drey Stellen u. s. w. **von der Rechten gegen die Linke fortgerückt** wird. Und umgekehrt bedeutet eine jede Ziffer zehnmal **weniger**, wenn sie um eine, hundertmal weniger, wenn sie um zwey, tausendmal weniger, wenn sie um drey Stellen u. s. w. **von der Linken gegen die Rechte zurückgerückt** wird.

8) Die Null bedeutet an sich, oder wenn sie allein steht, gar nichts, sie wird aber gebraucht, um eine Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Ziffer steht, damit man daraus die Stellen der übrigen Ziffern in einer Reihe erkennen, und darnach ihre Bedeutungen bestimmen könne.

Z. B. 0 bedeutet an sich nichts, schreibt man dieses Zeichen aber hinter eine andere Ziffer, als 50, so zeiget die Null an, daß die 5 in der zweyten Stelle stehe, und also nicht als ein Einer, sondern als ein Zehner anzusehen sey, folglich nicht fünf, sondern zehnmal fünf oder funfzig bedeute. Steht folglich die Null zur Linken einer Ziffer, so wird der Werth derselben dadurch nicht geändert, z. B. 05, oder 005 ist so viel als 5.

Anmerk. 1) Diese Sätze von der verschiedenen Bedeutung der Ziffern nach ihren verschiedenen Stellen gründen sich auf der Art, wie wir beym Zählen verfahren, wovon das wesentliche hier angeführt zu werden verdient. Wir zählen von eins bis zehn, (wozu die Anzahl unserer Finger ohne Zweifel die erste Veranlassung gegeben hat), und geben jeder dazwischen fallenden Zahl eine besondere Benennung. Hierauf machen wir aus diesen zehn Einern eine neue Einheit, welche eine Einheit von der ersten höhern Ordnung, oder ein Zehner heißt, und zählen sodann wieder bis zehn Zehner, welches auch die Benennung derselben schon einigermaßen anzeigt, indem wir zwey Zehner zwanzig, drey Zehner dreißig, vier Zehner vierzig u. s. w. nennen. Aus zehn Zehnern machen wir wiederum eine neue

neue Einheit, welche eine Einheit von der zweyten höheren Ordnung, oder ein Hunderter heißt, und zählen hierauf die Hunderte wieder von eins bis zehn, nemlich einhundert, zweyhundert, dreyhundert u. s. w. Aus zehn Hunderten machen wir ferner eine neue Einheit, welche eine Einheit von der dritten höheren Ordnung oder ein Tausender heißt, und zählen nunmehro die Tausende gleichfalls bis zehn, daraus denn wieder Zehner von Tausenden, oder Zehntausende oder Einheiten der vierten höheren Ordnung, ferner Hunderte von Tausenden, oder Hunderttausende, als Einheiten der fünften höheren Ordnung, endlich Tausende von Tausenden, d. i Millionen, als Einheiten der sechsten höheren Ordnung entstehen. Eben so entstehen aus den Millionen, Zehner, Hunderte, Tausende ꝛc. derselben als Einheiten der siebenten, achten, neunten ꝛc. Ordnung. Wir verfahren demnach bey den unbenannten Zahlen eben so, nur regelmäßiger, wie bey benannten. So z. B. zählen wir die Quentchen bis auf vier; aus vier Quentchen machen wir eine neue Einheit, welche ein Loth genannt wird, und zählen die Lothe bis 32; aus 32 Loth wird wiederum eine neue Einheit, welche ein Pfund genannt wird, u. s. w. und so wie wir z. B. nicht zählen: 5, 6, 7 Quentchen, sondern 1 Loth 1 Q.; 1 L. 2 Q.; 1 L. 3 Q. ꝛc.; so zählen wir auch z. B. dreyzehn, d. i. zehn und drey; vierzehn, d. i. zehn und vier u. s. w. Nur die Benennungen elf und zwölf machen im Deutschen hievon eine Ausnahme. Soll nun eine Menge, in welcher z. B. Tausende enthalten sind, durch eine Zahl ausgedruckt werden; so wird zuvörderst angezeigt, wie viel Tausende die Menge enthalte, darnach wie viel sie außerdem noch Hunderte, ferner wie viel sie außer diesen noch Zehner, und endlich wie viel sie außer den Zehnern noch Einer enthalte, gerade so, wie wir z. B. bey einer Summe Geldes zuvörderst anzeigen, wie viel Thaler, als die größte Einheit, sie enthalte, hierauf, wie viel sie außer den Thalern Groschen, endlich, wie viel sie außer den Groschen noch Pfennige enthalte. Die Jahrzahl 1782 zeigt an, daß seit Christi Geburt ein volles Tausend von Jahren, überdem noch 7 Hunderte, ferner noch 8 Zehner von Jahren, und außer diesen endlich noch 2 einzelne Jahre verflossen sind. Wie wir nun z. B. beym Ausdruck eines Gewichts durch eine Zahl jede Ziffer besonders setzen, die sich auf eine besondere Einheit bezieht, als

1 Cent. 7 Pfund 8 L. 2 Q.

so verfahren wir auch bey den unbenannten Zahlen, nur daß die Regelmäßigkeit, nach welcher eine jede höhere Ordnung aus der vordergehenden entsteht, es unnöthig macht, die Einheiten ausdrücklich zu nennen, und z. B. die Jahrzahl nicht, wie vorhin die Gewichtzahl,

1 Tausend 7 Hunderte 8 Zehner 2 Einer

sons

sondern nur folgendergestalt

1782

geschrichen werden darf, weil schon aus der Stelle jeder Ziffer nach den gegebenen Regeln sogleich beurtheilt werden kann, was für Einheiten von jeder Ordnung sie bedeute.

*) Durch diese Art zu zählen und die Zahlen zu bezeichnen ist man in den Stand gesetzt, mit wenigen Zeichen und Benennungen derselben eine jede, auch die gröste Zahl, leicht auszudrucken, und aus dieser Ursache gehört dieselbe zu den wichtigsten Erfindungen, indem dadurch die Rechnung mit Zahlen in jeder Rücksicht ungemein erleichtert wird. Es sind aber die Vortheile dieser Erfindung durch die Erfindung der Decimalbrüche noch mehr erweitert worden, indem man dadurch in den Stand gesetzt ist, auch jede kleinste Zahl auf eine eben so vortheilhafte Weise auszudrucken, daher hier und im folgenden einiger Begrif davon gegeben werden soll.

Von den Decimalbrüchen.

I. Aus dem vorhin unter Num. 7 angeführten allgemeinen Gesetz, nach welchem die Bedeutung jeder Ziffer aus ihrer Stelle zu beurtheilen ist, erhellt zugleich die Regel, wie eine gegebene ganze Zahl zehnmal, hundertmal, tausendmal u. s. w. gröſser gemacht werden könne. Da nemlich jede Ziffer zehnmal mehr gilt, wenn sie in die nächsthöhere, hundertmal mehr, wenn sie in die darauf folgende Stelle u. s. w. gerückt wird, so darf man nur jede Ziffer der gegebenen Zahl um eine, oder zwey, oder drey ꝛc. Stellen von der Rechten zur linken vorrücken, je nachdem die Zahl entweder zehnmal, oder hundertmal, oder tausendmal ꝛc. gröſser werden soll. Indem alsdenn jede Ziffer zehnmal, oder hundertmal, oder tausendmal ꝛc. mehr bedeutet, als vorhin, so bedeuten auch alle Ziffern zusammen eine zehnmal, oder hundertmal, oder tausendmal ꝛc. gröſsere Zahl.

Z. B. Wenn die obige Zahl

4397685

zehnmal gröſser gemacht werden soll; so wird dies geschehn, wenn die 4, welche in der siebenten Stelle steht, in die

die achte, die 3, welche in der sechsten Stelle steht, in die siebente, die 9 in die sechste, u. s. w. Stelle gerückt werden, da denn zuletzt die 5 in die zweyte Stelle kommt, und in die erste Stelle eine Null gesetzt werden muß, wodurch aus der Zahl

4397685

folgende wird 43976850.

Eben so erhellet, daß 439768500 hundertmal
4397685000 tausendmal
2c. 2c.

größer ist, weil im ersten Fall jede Ziffer um zwey, im andern Fall um drey Stellen vorgerückt ist, also in jenem Fall einen zehnmal zehn- oder hundertmal, in diesem einen zehnmal hundert- oder tausendmal größern Werth erhalten hat.

II. Eben so erhellt auch aus dem vorhin gedachten Gesetze, daß umgekehrt eine Zahl zehnmal, hundertmal, tausendmal 2c. kleiner gemacht werden könne, wenn eine jede Ziffer derselben um eine, zwey, drey 2c. Stellen von der Linken zur Rechten zurückgerückt wird. Da nemlich jede Ziffer zehn- hundert- tausendmal 2c. weniger bedeutet, wenn sie um eine, zwey, drey 2c. Stellen niedriger gesetzt wird, so werden auch alle Ziffern eine eben so viel mal kleinere Zahl bedeuten.

Z. B. Wenn die Zahl

439768500

zehnmal kleiner gemacht werden soll; so muß die 4, welche in der neunten Stelle steht, in die achte, die 3, welche in der achten Stelle steht, in die siebente, die 9 in die sechste u. s. w., endlich die 5, welche in der dritten Stelle steht, in die zweyte Stelle kommen, welches alles hier dadurch erhalten werden kann, daß eine der beyden Nullen weggelassen wird. Auf diese Art wird aus der Zahl

439768500

folgende 43976850

Eben so erhellet, daß 4397685 herauskommen, wenn die obige Zahl hundertmal kleiner gemacht werden soll, indem in diesem Fall jede Ziffer um zwey Stellen zurückzurücken war, welches dadurch geschehn konnte, daß beyde Nullen weggelassen wurden.

III. Bey einer solchen Verkleinerung der Zahlen erhalten oft einige oder alle Ziffern derselben Werthe, die sich auf Einheiten beziehen, welche zehnmal, hundertmal, tausendmal ꝛc. kleiner als die Einer sind.

Z. B. Wenn die vorhin herausgebrachte Zahl

4397685

noch zehnmal kleiner werden soll; so muß jede Ziffer noch um eine Stelle von der Linken zur Rechten zurückgerückt werden, folglich kommt die 4, welche in der siebenten Stelle, d. i. in der Stelle der Millionen steht, in die sechste Stelle, welches die Stelle der Hunderttausende ist, die 3 kommt aus der sechsten in die fünfte Stelle, oder aus der Stelle der Hunderttausende in die Stelle der Zehntausende, die 9 kommt aus der fünften oder der Stelle der Zehntausende in die vierte, d. i. in die Stelle der Tausende, u. s. w. die 8 endlich kommt aus der zweyten Stelle oder aus der Stelle der Zehner in die erste Stelle, d. i. in die Stelle der Einer, folglich wäre die 5 in eine Stelle zu setzen, in welcher sie zehnmal weniger als 5 Einer bedeutete.

Sollte eben diese Zahl 4397685 hundertmal kleiner werden; so erhellt eben so, daß, weil jede Ziffer um zwey Stellen zurückgerückt werden muß, die 6 in die Stelle der Einer kommen werde, und folglich die 8 in eine Stelle, in welcher sie zehnmal weniger als 8 Einer, die 5 aber in eine Stelle zu setzen sey, in welcher sie zehnmal zehn, d. i. hundertmal weniger als 5 Einer bedeutet.

IV. Da nun ein Zehntel oder der zehnte Theil einer Einheit z. B. eines Einers zehnmal kleiner ist, als ein Einer, und eben so ein Hundertel eines Einers hundertmal, ein Tausendtel tausendmal kleiner ist, als ein Einer; so sind auch 2, 3, 4 ꝛc. Zehntel oder Hundertel oder Tausendtel ꝛc., zehnmal, hundertmal, tausendmal ꝛc. kleiner als 2, 3, 4 ꝛc. Einer; folglich entstehen durch eine dergleichen Verkleinerung der Zahlen Brüche, und zwar bedeuten diejenigen Ziffern, welche zunächst auf die Einer, zur Rechten derselben, folgen, d. i. welche neben den Einern in die erste nächstniedrige

Stelle

Stelle kommen, **Zehntel**, diejenigen, welche in die zweyte nächstniedrige Stelle kommen, bedeuten **Hundertel**, die in der dritten **Tausendtel**, in der vierten **Zehntausendtel** u. s. w. und überhaupt bedeuten auch diese Ziffern in jeder niedrigeren Stelle zehnmal weniger, als in der nächst vorhergehenden. Diese Brüche werden **Decimalbrüche** genannt, und ihre Stellen werden von der Stelle der Einer durch ein Comma unterschieden, welches zur Rechten neben der Stelle der Einer gesetzt wird.

Z. B. Wenn die Zahl

4397685 gegeben ist; so

ist 439768,5 zehnmal
43976,85 hundertmal
4397,685 tausendmal
439,7685 zehntausendmal u. s. w.
0,4397685 zehnmillionenmal,

und 0,04397685 hundertmillionenmal

kleiner, als die gegebene Zahl. Die Null zur Linken des Comma in den beyden letzten Reihen zeigt an, daß die Zahlen keine Einer, und überhaupt keine ganze Einheiten, sondern die erste 4 Zehntel, 3 Hundertel, 9 Tausendtel, 7 Zehntausendtel, 6 Hunderttausendtel, 8 Millionentheile und 5 Zehnmillionentheile, die zweyte aber nicht nur keine Einer sondern auch keine Zehntel, nur 4 Hundertel, 3 Tausendtel u. s. w. enthalte. Eben so bedeutet 0,00057 nur 5 Zehntausendtel und 7 Hunderttausendtel.

Anmerk. Die Zehntel werden auch Einheiten der ersten, die Hundertel Einheiten der zweyten, die Tausendtel Einheiten der dritten u. s. w. niedrigeren Ordnung, die Stellen einer Zahl aber, in welchen Decimalbrüche stehen, Decimalstellen genannt.

Die Rechnung mit ganzen Zahlen und Decimalbrüchen

8. *Was heißt Numeriren?

Die Bedeutung einer mit Ziffern geschriebenen Zahl mit Worten, ingleichen eine ausgesprochene Zahl mit geschriebenen Ziffern anzeigen.

9. Was ist zu beobachten, wenn eine Reihe Ziffern ausgesprochen werden soll?

1) Man übe sich zuförderst, eine jede Reihe von 3 Ziffern mit oder ohne Nullen fertig auszusprechen, z. B. 753, 750, 703, 700, 053, 050, 005.

2) Ist nun eine größere Reihe von Zahlen auszusprechen, so wird dieselbe entweder durch besondere Zeichen, z. B. durch Striche, oder nur im Gedächtniß von der Rechten zur linken in Classen abgetheilt, deren jede sechs Ziffern bekommt. In der ersten Classe befinden sich also die **Einer**, **Zehner**, **Hunderte**, **Tausende**, **Zehntausende**, **Hunderttausende**; in der zweyten eben diese Einheiten, aber der **Millionen**, nemlich die **Einer der Millionen**, die **Zehner der Millionen**, die **Hunderte**, **Tausende**, **Zehntausende** und **Hunderttausende** derselben; in der dritten eben diese Einheiten von den **Billionen**, in der vierten von den **Trillionen** u. s. w.

3) Jede dieser Hauptclassen wird wieder in zwo kleinere Classen eingetheilt, deren jede drey Ziffern erhält. Sie werden etwa durch kleinere Striche, oder die Hauptclassen durch doppelte Striche angezeigt.

4) Hierauf spricht man jede drey Zahlen dieser Classen so aus, wie sie ausgesprochen werden müßten, wenn sie allein stünden, z. B. die in folgender Reihe stehenden Zahlen der ersten Classe, wie 005, oder 5, der zweyten, wie 050 oder 50, der dritten, wie 053, oder 53, der vierten, wie 700 u. s. w. Am Ende der ersten, zweyten, dritten u. s. w. Hauptclasse aber, von der Rechten zur linken gerechnet, setzt man die Worte **Einer**, **Millionen**, **Billionen** u. s. w. am Ende einer jeden Zwischenclasse das Wort **Tausend** hinzu, doch wird das Wort **Einer** zu Ende der ersten

Haupt-

Hauptclasse gemeiniglich weggelassen, wiewol es allemal verstanden werden muß.

Z. B. Folgende Reihe Ziffern 7537037000053050005 ist also abzutheilen: 753 | 703 || 700 | 053 || 050 | 005.

Nach der vierten Regel wird sie nun folgendergestalt von der Linken gegen die Rechte ausgesprochen:

753 Tausend 703 Billionen, 700 Tausend 53 Millionen, 50 Tausend und fünf Einer; oder schlechthin: 50 Tausend und fünf, indem das Wort Einer weggelassen wird.

Anmerk. 1) Stehn in der Classe jeder Tausende lauter Nullen, so läßt man das Wort Tausend für diese Zwischenclasse weg; Die Wörter Millionen, Billionen u. s. w. müssen aber nie weggelassen werden, es sey denn, daß in der ganzen Hauptclasse lauter Nullen wären. Z. B. Folgende Reihe:

7 | 000 | 000 || 549 | 000 | 000 || 669 | 000

wird folgendergestalt ausgesprochen:

7 Tausend Trillionen, 549 Billionen, 669 Tausend.

2) Bey Aussprechung der Decimalbrüche wird in der Hauptsache auf eben die Art verfahren, nur ist zu bemerken, 1) daß nach der letzten Ziffer das Wort Zehntel, Hundertel u. s. w. auszusprechen ist, je nachdem die letzte Ziffer Zehntel, oder Hundertel u. s. w. bedeutet. Z. B. Folgende Zahl

0,7 || 398 | 471

wird folgendergestalt ausgesprochen: 7 Millionen, 398 Tausend, 471 Zehnmillionentheile, weil die letzte Ziffer 1 in der Stelle der Zehnmillionen Theile steht. 2) Wenn eine Reihe Ziffern aus ganzen Zahlen und Decimalbrüchen besteht; so werden entweder die ganzen Zahlen besonders, und die Decimalbrüche gleichfalls besonders abgetheilt, und auch ausgesprochen, oder es wird bey der ganzen Reihe, ohne Rücksicht auf die Stelle des Comma, wie bey ganzen Zahlen verfahren, und nur zuletzt die Einheit der niedrigsten Ziffer genannt. Z. B. Folgende Reihe

4579,5321678

wird entweder folgendergestalt getheilt:

4 | 579,5 || 321 | 678

und folgendergestalt ausgesprochen: 4 Tausend 579 Ganze, und 5 Millionen 321 Tausend 678 Zehnmillionentheile; oder sie wird, ohne auf die Stelle des Comma zu achten, folgendergestalt getheilt:

45 | 79,5 || 321 | 678

und folgendergestalt ausgesprochen, 45 Tausend 795 Millionen 321 Tausend 678 Zehnmillionentheile; welches eigentlich so viel sagen will: 45 Tausend Zehnmillionentheile, 795 Millionen eben dieser Theile u. s. w. Diese Aussprechungsart gründet sich darauf, daß jede ganze Zahl auch als ein Bruch angesehn werden kann; z. B. 1 ist so viel als zehn Zehntel, hundert Hundertel ꝛc. 10 ist so viel als 100 Zehntel, 1000 Hundertel ꝛc. Eben so sind obige 4 Tausend Ganze so viel als 40 Tausend Zehnmillionentheile u. s. w.

20. Was ist zu beobachten, wenn eine ausgesprochene große Zahl mit Ziffern geschrieben werden soll?

1) Es werden auf dem Papier oder der Tafel nach Anleitung der vorhergegebenen Anweisung so viele Abtheilungen durch Striche oder andere Zeichen, zwischen welche allemal drey Ziffern in einer Reihe geschrieben werden können, gemacht, als die ausgesprochene Zahl erfordert; nemlich, wenn dieselbe nur Tausende enthält, so wird nur ein Strich gemacht; enthält dieselbe Millionen, so werden zwey Striche, und zwar ein doppelter und einfacher, gemacht; enthält sie tausend Millionen, so werden drey Striche gemacht; enthält sie Billionen, so werden vier Striche gemacht, u. s. w.

2) Wird eine jede ausgesprochne Zahl mit der gehörigen Figur und in die gehörige Stelle von der linken gegen die Rechte geschrieben, die leergebliebenen Stellen aber werden mit Nullen ausgefüllt.

Z. B. Es sey die Zahl zu schreiben: Sieben tausend, drey hundert zwey und achtzig Millionen, fünf tausend und vier und sechzig; so werden, weil tausend Millionen darin vorkommen, drey Striche gemacht, und die einzelnen Ziffern nebst den Nullen der drey fehlenden Stellen also zwischen die Striche gesetzt:

7 | 382 | 005 | 064

Anmerk. 1) Es ist sehr zu verhüten, daß man die Einer, welche beym Aussprechen der Zahlen vor den Zehnern, darauf sie folgen sollten, genannt werden, nicht wirklich vor dieselben setze. Z. B. in dem vorigen Exempel wird in dem beyden

beyden letztern Stellen zur Rechten die 6 eher geschrieben als die 4, ob man gleich die vier eher ausspricht; denn 46 würde nicht vier und sechzig, sondern sechs und vierzig heißen.

2) Auf Decimalbrüche, wenn dergleichen zu schreiben vorkommen, läßt sich von den hier für ganze Zahlen gegebenen Regeln nach dem vorhergehenden die Anwendung leicht machen.

11. *Welches sind die Veränderungen, so mit einer Zahl vorgenommen werden können?

Eine Zahl kann verändert werden:

1) Durch das **Addiren** oder die **Addition**, wenn zu einer Zahl eine oder mehrere andere einmal hinzugesetzt werden, z. B. wenn zu 24 die Zahl 3 hinzugesetzt wird.

Anmerk. Die Zahlen, welche addirt werden sollen, heißen die Posten, die gesuchte Zahl aber, welche den Posten zusammengenommen gleich ist, die Summe. Z. B. Hier sind 24 und 3 die Posten, die Summe aber ist 27.

2) Durch das **Subtrahiren**, oder die **Subtraction**, wenn von einer Zahl eine kleinere einmal weggenommen wird, z. B. wenn von 24 die Zahl 3 weggenommen wird.

Anmerk. Die gesuchte Zahl, welche anzeigt, wie viel von der größern Zahl übrig bleibt, heißt der Rest oder die Differenz. Z. B. hier ist der Rest 21.

3) Durch das **Multipliciren** oder die **Multiplication**, wenn eine Zahl, oder ein Theil derselben, so vielmal genommen werden soll, als eine andere Zahl Einheiten, oder Theile der Einheit, enthält.

Z. B. Wenn die Zahl 24 mit 3 multiplicirt werden soll; so geschieht dies, wenn sie dreymal genommen oder zu sich selbst addirt wird. Soll aber die Zahl 30 mit $\frac{5}{10}$ d. i. mit 5 Zehntel multiplicirt werden, so geschieht dies, wenn der zehnte Theil von 30, welcher 3 ist, fünfmal genommen, oder zu sich selbst addirt wird.

Anmerk. Die Zahlen, welche multiplicirt werden sollen, heißen die Factoren, und zwar derjenige, welcher multiplicirt werden soll, der Multiplicandus, der andere aber, womit

womit multiplicirt werden soll, der **Multiplicator**. Die Zahl, welche dadurch gefunden wird, heißt das **Product**. Z. B. In dem ersten vorhin angeführten Beyspiel sind 24 und 3 die Factoren, und zwar kann 24 zum Multiplicandus, 3 zum Multiplicator genommen werden, 72 aber ist das Product. In dem zweyten Beyspiel sind 30 und 0,5 die Factoren, und 15 ist das Product.

4) Durch das **Dividiren** oder die **Division**. Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt eine Zahl finden, welche, wenn sie mit dieser andern multiplicirt wird, die erstere zum Product giebt.

Z. B. 24 durch drey dividiren, heißt diejenige Zahl finden, welche mit 3 multiplicirt, 24 zum Product giebt; welches hier dadurch geschehn kann, daß man durch die wiederholte Subtraction der Zahl 3 von 24 findet, wie vielmal 3 in 24 enthalten sey. Jedoch ist nicht eine jede Division eine wiederholte Subtraction, weil nicht jede Multiplication eine wiederholte Addition ist.

Anmerk. 1) Die Zahl, welche dividirt, und also als ein Product angesehn wird, heißt der **Dividendus**; die Zahl, mit welcher dividirt, und welche als ein Factor des Dividendus angesehn wird, heißt der **Divisor**; die gesuchte Zahl endlich, welche der andere Factor des Dividendus seyn soll, heißt der **Quotient**.

2) Das Zeichen der Addition ist in der gemeinen Arithmetik (+), welches durch **plus**, und der Subtraction (—), welches durch **minus** ausgesprochen wird. Jedoch haben diese beyde Zeichen in der Mathematik noch eine allgemeinere Bedeutung. Das Zeichen der Multiplication ist in der Mathematik (×), oder auch ein Punct (.); das Zeichen der Division ist entweder (:), wobey zu bemerken, daß der Dividendus allemal zur Linken, und der Divisor zur Rechten dieses Zeichens gesetzt werden muß, oder ein Strich, über welchen der Dividendus, und unter welchen der Divisor gesetzt wird. Das Zeichen der Gleichheit zweyer Zahlen oder Größen ist (=). Dieser und noch mehrerer anderer Zeichen bedient man sich in der Mathematik mit großem Vortheil, vornemlich zur Erleichterung der Erlernung derselben, weil dadurch oft Sätze kürzer, als mit Worten geschehen kann, und so ausgedruckt werden können, daß man leichter sie übersehen, ihre Gründe begreifen, und sie im Gedächtniß behalten kann. Sie werden vornehmlich in der Buchstabenrechenkunst und Algebre gebraucht, welche Wissenschaften daher zur Erleichterung der Erlernung der Mathematik vorzüglich beytragen. Einige Beyspiele von dem Gebrauch dieser Zeichen sind

sind folgende: $2+5$ bedeutet, daß 2 und 5 addirt werden sollen: $5-2$ bedeutet, daß 2 von 5 subtrahirt werden soll; 2×5, oder 2.5 bedeutet, daß beyde Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und $5:2$ oder $\frac{5}{2}$ bedeutet, daß 5 durch 2 dividirt werden soll; dagegen bedeutet $2:5$ oder $\frac{2}{5}$, daß 2 durch 5 zu dividiren ist. $2+5=7$ bedeutet: die Summe von 2 und 5 ist 7; $6+9=8+7$ bedeutet: die Summe von 6 und 9 ist gleich der Summe von 8 und 7.

3) Eine jede Zahl, welche durch das Rechnen gefunden worden, wird überhaupt das Facit, bey weitläuftigen Rechnungen aber das Resultat genannt.

4) Die vier angezeigten Arten der Veränderungen einer Zahl werden die vier Species der Rechenkunst genannt.

Die vier Species in ganzen unbenannten Zahlen, und in Decimalbrüchen.

12. *Wie werden zwey oder mehrere Zahlen addiret?

1) Es werden die gegebenen Posten also unter einander gesetzt, daß Ziffern von einerley Ordnung gerade unter einander kommen, nemlich Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. folglich auch, wenn Decimalbrüche dabey sind, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w. Eine jede Reihe so geordneter Ziffern, die zu einerley Ordnung gehören, und also gerade unter einander stehen, wird eine Columne genannt. Unter sämmtliche Posten wird hierauf ein Strich gezogen.

2) Werden die Ziffern jeder Columne, und zwar zuerst die Ziffern von der niedrigsten Ordnung, welche in der äußersten Columne zur Rechten stehen, und hierauf nach der Reihe die Ziffern jeder nächstfolgenden Columne zusammengezählt.

3) Wenn die Summe der Ziffern einer Columne nur eine einzige Ziffer ist, z. B. 5; so wird diese sogleich unter den Strich, und zwar gerade unter die zusammengezählte Columne gesetzt.

4) Wenn aber die gedachte Summe aus mehr Ziffern besteht, z. B. wenn sie 10 oder 11 u. dergl., welche aus zwey Ziffern, oder 100, 126 u. dergl. welche aus 3 Ziffern bestehen, u. s. w. beträgt; so wird die niedrigste Ziffer unter die zusammengezählte Columne gesetzt, und die höhere oder höheren Ziffern werden zu der nächstfolgenden Columne addirt. Ist aber die zusammengezählte Columne die letzte zur linken, so wird die ganze Summe unter dieselbe geschrieben.

Z. B. Wenn die Summe einer Columne 56 oder 156 beträgt, so wird in beyden Fällen 6 als die niedrigste Ziffer unter dieselbe Columne unter den Strich gesetzt, zu der folgenden Columne aber wird im ersten Fall 5, im andern 15 addirt.

5) Die also einzeln gefundene Summen zusammen genommen geben die gesuchte Summe aller gegebenen Posten.

Z. B. Es sollen folgende Zahlen, welche sogleich gehörig unter einander gesetzt sind, addirt werden:

I.	II.
59027	5,9027
8494	0,8494
36765	3,6765
Summa 104286	Summa 10,4286

Die unter den Strich gesetzte Summe ist hier in beyden Beyspielen nach den hier gegebenen Regeln also gefunden worden 5 und 4 sind 9 (wie man an den Fingern abzählen kann) 9 und 7 sind 16. Von dieser 16, welche die Summe der Ziffern der niedrigsten Columne in beyden Beyspielen ist, wird die 6 als die niedrigste Ziffer unter den Strich gerade unter dieselbe Columne gesetzt, die 1 aber wird, weil sie in die zunächst höhere Stelle gehört, zu den Ziffern der nächstfolgenden Columne addirt, indem man sagt: 1 und 6 sind 7; 7 und 9 sind 16; 16 und 2 sind 18, davon wieder die 8 unter dieselbe Columne neben der vorhin gefundenen 6 geschrieben, die 1 aber zu der nächstfolgenden dritten Columne addirt wird. Eben so werden die Ziffern der dritten Columne addirt, da denn die Summe 12 kommt, wovon wieder die 2 unter dieselbe Columne gesetzt, die 1 aber zu der folgen-

folgenden vierten Columne addirt wird. Die Summe der vierten Columne ist 24, davon 4 unter dieselbe gesetzt, und 2 zur fünften Columne addirt wird. Die Summe dieser fünften Columne, welche 10 ist, wird ganz hingeschrieben, weil keine höhere Columne weiter da ist. Folglich ist die Summe aller Posten in dem ersten Beyspiel 104286, und in dem zweyten 10,4286; woraus zugleich erhellt, daß Decimalbrüche und ganze Zahlen nach einerley Regeln addirt werden.

Anmerk. Der Bequemlichkeit wegen, und weil keine Verwirrung davon zu besorgen ist, summirt man die Ziffern jeder Columne, ohne die Benennungen der Einheiten hinzuzufügen, welche sie bedeuten. Eigentlich würde sonst z. B. bey der ersten Columne des zweyten Beyspiels folgendergestalt summirt werden müssen: 5 Zehntausendtel und 4 Zehntausendtel sind 9 Zehntausendtel; 9 Zehntausendtel und 7 Zehntausendtel sind 16 Zehntausendtel, welches aber bey dieser Columne sowohl als bey jeder andern Columne beyder Beyspiele zu langwierig und auch überflüssig seyn würde, da jede Ziffer der Summe doch in ihre gehörige Stelle kommt.

Beyspiele zur Uebung.

46384	38426	93,45	1234
32965	5683	0,023	185,43
78203	42675	174,0306	0,00023
54628	9840	0,32	36
212180	96624	267,8236	1455,43023

Anmerk. Die beste Probe, ob man richtig addirt habe, ist diese, daß man das gegebene Exempel öfters, sonderlich zu verschiedenen Zeiten addirt, oder von jemand anders nachrechnen läßt. Kommt nun allemal dieselbe Summe, so kann man sich auf die Richtigkeit derselben verlassen.

13. *Wie wird eine Zahl von einer größern subtrahiret?

1) Es werden beyde gegebene Zahlen also unter einander gesetzt, daß die Ziffern von einerley Ordnung gerade unter einander kommen; gewöhnlich wird auch die kleinere oder abzuziehende Zahl **unter** die größere, von welcher der Abzug geschehen soll, gesetzt. Unter beyde Reihen wird hierauf ein Strich gezogen.

2) Wird jede Ziffer der kleinern Zahl, indem man von der niedrigsten anfängt, von der Ziffer, welche

in

in der andern Zahl dieselbe Stelle hat, weggenommen und der Rest unter den Strich, und zwar unter die Stelle der abgezogenen Ziffer gesetzt.

3) Wenn eine Ziffer der kleinern Zahl größer ist als die Ziffer derselben Ordnung in der größern Zahl: so wird von der Ziffer der nächst höhern Ordnung in der größern Zahl 1 abgenommen oder **geborgt**, welche 1 zehn Einheiten der nächst niedrigern Ordnung gilt. Diese 10 wird demnach zu den Ziffern dieser niedrigern Ordnung addirt, und alsdenn die Subtraction vorgenommen; um aber zu bemerken, daß die Ziffer der höhern Ordnung nunmehro 1 weniger gilt, wird über dieselbe ein Punct gemacht. Steht aber in der nächst höhern Ordnung eine 0, so macht man über dieselbe nur einen Punct, und borgt alsdenn von der darauf folgenden höhern Ordnung 1, welche eins 100 Einheiten derjenigen Ordnung gilt, bey welcher man im Abziehen begriffen ist. Diese 100 bestehen aus 10 Zehnern der gedachten Ordnung, welche man sich in Gedanken in 9 Zehner und 1 Zehner, d. i. in 90 und 10 theilt. Die 10 addirt man zu der Ziffer, von welcher der Abzug geschehn soll, und subtrahirt wirklich. Die übrigen 9 Zehner gehören nun in die folgende Stelle, wo die 0 steht, und die darunterstehende Zahl wird also nun von 9 abgezogen, daher man sagt, daß, wenn man über eine 0 weggeborgt hat, aus der 0 eine 9 werde. Eben so gelten mehrere Nullen, über welche geborgt worden, alle zusammen 9, wie aus den Erläuterungen der gleich folgenden Beyspiele noch deutlicher erhellen wird. Die ganze unter den Strich geschriebene Reihe Ziffern, giebt endlich den gesuchten Rest.

Z. B. Es sollen folgende Zahlen von einander subtrahirt werden, wo die kleinere unter die größere Zahl schon gehörig gesetzt worden ist.

	5 10		5 10
I.	486·0·49·6	II.	486,0,49·6
	351 7 52 8		351,7 52 8
Rest	134 2 96 8	Rest	134,2 96 8

Der unter den Strich gesetzte Rest ist hier in beyden Beyspielen nach den hier gegebenen Regeln also gefunden worden: 8, welches die niedrigste Ziffer der kleinern Zahl ist, kann von der darüber stehenden Zahl 6 nicht abgezogen werden, es ist daher bey der nächstfolgenden Ziffer 9 eine 1 geborgt, und dieses durch einen Punct bemerkt worden. Diese 1 gilt 10 solcher Einheiten, als die 6 anzeigt, (welche im ersten Beyspiel Einer, im zweyten Zehntausendtel sind,) diese 10 werden demnach zu 6 addirt, und von der Summe 16 wird 8 abgezogen. Der Rest ist 8, welches man leicht finden kann, wenn man 16 Puncte macht, 8 Puncte davon wegstreicht, und die übrig bleibenden zusammenzählt. Dieser Rest 8 ist unter den Strich, gerade unter die abgezogene Zahl 8 gesetzt. Hierauf wird die folgende Zahl 2 von der darüberstehenden 9, welche aber nunmehro nur 8 gilt, weil von der neunten Einheit schon vorhin ein Abzug geschehen ist, abgezogen. 2 von 8 weggenommen, bleibt 6, welche 6 gehörig unter den Strich gesetzt wird. Die folgende Zahl 5 kann von der darüber stehenden 4 nicht abgezogen, auch kann bey der folgenden höhern Ordnung nicht geborgt werden, weil eine 0 da steht, daher wird bey der 6 eine 1 geborgt. Diese 1 gilt 10 Einheiten der nächst niedrigern Ordnung, d. i. derjenigen Ordnung, in deren Stelle die 0 steht. (In dem ersten Beyspiele ist die geborgte 1 ein Zehntausender, und sie gilt also zehn Tausende, in dem zweyten Beyspiel ist die geborgte 1 ein Einer, welcher zehn Zehntel gilt.) Man stellt sich daher die Sache so vor: als wäre an die Stelle der 6, bey welcher geborgt ist, eine 5, anstatt der 0 aber oder über der 0, eine 10 gesetzt, wie der Deutlichkeit wegen in den obigen Beyspielen wirklich angezeigt ist. Von diesen 10 wird nun wiederum 1 geborgt, daher aus der 10 eine 9 wird. Diese geborgte 1 (welche im ersten Beyspiel 1 Tausend, im andern 1 Zehntel ist) gilt 10 solcher Einheiten, als die 4 anzeigt, von welcher abgezogen werden soll. (1 Tausend gilt 10 Hundertel; und die 4 im ersten Beyspiele bedeutet ebenfalls Hunderte; 1 Zehntel gilt 10 Hundertel, und die

die 4 im zweyten Beyspiel bedeuter gleichfalls Hundertel); addirt man demnach 4 und 10; so läßt sich 5 von der Summe 14 abziehen. Der Rest ist 9, welcher gehörig unter den Strich gesetzt wird. Hierauf wird 7 von 9, welche 9 von der an die Stelle der 0 gesetzten 10 noch übrig geblieben sind, sodenn 1 von 5 abgezogen. 7 von 9 bleibt 2; 1 von 5 bleibt 4; ferner 5 von 8 bleibt 3, und endlich 3 von 4 bleibt 1. Wenn diese sämmtliche Reste an ihren gehörigen Ort unter den Strich gesetzt worden sind; so ist die ganze unter dem Strich stehende Zahl der gesuchte Rest. Der Rest im ersten Beyspiel, welches mit dem zweyten einerley Ziffern, nur von anderm Werthe hat, hat mit dem Rest des zweyten Beyspiels gleichfalls einerley Ziffern, und überhaupt erhellt auch hier, daß die Decimalbrüche und ganze Zahlen nach einerley Regeln subtrahirt werden.

Beyspiele zur Uebung.

	2 9 9 10		
I. 5·3·29	II. 63·0·0·0	III. 7,39·0·0845	IV. 3,68
4 36	51 3 9 4	0,04 3 79	0,47934
4 8 93	11 6 0 6	7,34 6 2945	3,20066

Bey dem zweyten dieser Beyspiele, wo 51394 von 63000 abgezogen worden ist, ist folgendes zu merken. Weil bey den 3 niedrigsten Stellen kein Abzug geschehn kann; so wird von den 3 Tausenden 1 Tausend geborgt. Von diesem einen Tausend, welches aus 10 Hunderten besteht, setzt man in Gedanken 9 Hunderte in die nächstniedrige Stelle, weil diese die Stelle der Hunderte ist. Von dem noch übrigen zehnten Hundert, welches aus 10 Zehnern besteht, setzt man 9 Zehner in die nächstniedrige Stelle, welches die Stelle der Zehner ist. Von dem noch übrigen zehnten Zehner, welcher aus 10 Einern besteht, zieht man die 4 Einer ab. Die folgenden Zehner und Hunderte der abzuziehenden Zahl werden sodenn von den bey der Theilung des einen Tausend übrig gebliebenen 9 Zehnern und 9 Hunderten abgezogen, und übrigens wird, wie vorhin gezeigt ist, verfahren.

Bey dem vierten Beyspiel, wo 0,47934 von 3,68 abzuziehen sind, ist zu bemerken, daß 3,68 so viel ist, als 3,68000, da also der Abzug wie beym zweyten Beyspiel geschieht. Eine Zahl nemlich, in welcher Decimalbrüche vorkommen, wird nur durch Versetzung des Comma größer oder kleiner, nicht aber durch Hinzusetzung einer oder mehrerer Nullen auf der einen oder andern Seite.

Anmerk. 1) Die Probe, ob man richtig subtrahirt habe, ist diese, daß man den gefundenen Rest zu der kleinern Zahl addirt,

addirt, da denn die Summe der gröſsern Zahl gleich seyn muß. Z. B. wenn in dem ersten Exempel der Rest 1342968 zu 3517528 addirt wird, so ist die Summe 4860496, welches die gröſsre Zahl ist.

2) Wenn mehrere Zahlen gegeben sind, welche zum Theil addirt, zum Theil subtrahirt werden sollen; so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Rechnung geschieht, wenn nur die geforderte Rechnungsart nicht verwechselt, und z. B. eine Zahl, welche subtrahirt werden soll, nicht addirt wird, und umgekehrt. Z. B. Wenn zu der Zahl 8 die Zahl 6 addirt, und auch 5 davon subtrahirt werden soll, so kommt einerley heraus, es mag zuerst die Addition und darauf die Subtraction, oder umgekehrt vorgenommen werden.

3) Wenn zwey Zahlen, deren eine von der andern subtrahirt werden soll, beyde um gleichviel, z. B. um 1, oder 2, oder 3 ꝛc. gröſser oder kleiner gemacht werden, so kommt einerley Rest heraus. Z. B. 6—4=2; 7—5=2; 5—3=2 u. s. w.

14. * Wie wird eine Zahl mit einer andern multiplicirt?

Erster Fall. Wenn die Factoren keine Decimalbrüche enthalten.

1) Wenn der Multiplicator nur **eine Ziffer** hat; so wird jede einzelne Ziffer des Multiplicandus von der Rechten zur Linken so vielmal genommen, als der Multiplicator Einheiten hat, und jedes solches einzelne Product unter die Ziffer des Multiplicandus gesetzt, daraus es entstanden ist. Kommt aber in einem solchen Product eine Ziffer einer höhern Ordnung, so wird dieselbe zu dem Product addirt, welches aus der Ziffer der nächsthöhern Ordnung im Multiplicandus entsteht. Alle diese einzelne Producte zusammen genommen geben das gesuchte Product.

Z. B. Es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multiplicirt werden:

3856
4

Product 15424

Das unter den Strich gesetzte Product ist hier also gefunden worden: 4 mal 6 ist 24, von diesem Product wird die 4 in die Stelle der Einer gesetzt, die 2 aber im Gedächtniß, oder, wie man zu reden pflegt, im Sinne behalten. Hierauf

auf sagt man, 4 mal 5 ist 20, wozu die im Sinne behaltene 2 addirt wird; von dem hierdurch vermehrten Product 22 wird die eine 2 unter die 5 geschrieben, die andere 2 aber im Sinne behalten. Ferner sagt man, 4 mal 8 ist 32 und 2 dazu ist 34, wovon die 4 unter die 8 gesetzt, die 3 aber im Sinne behalten wird. Endlich sagt man, 4 mal 3 ist 12 und 3 dazu ist 15, welche Zahl, weil keine höhere Ziffer im Multiplicandus mehr übrig ist, ganz hingeschrieben wird. Folglich ist das gesuchte Product 15424.

2) Wenn der Multiplicator **mehrere Ziffern** enthält; so wird zuerst das Product aus der Ziffer der niedrigsten Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus gefunden und unter den Strich geschrieben, hierauf wird auch das Product aus der Ziffer der nächsthöhern Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus gefunden und unter den Strich geschrieben, aber so, daß die niedrigste Ziffer dieses Products gerade unter die andere Ziffer des Multiplicators, daraus es entstanden ist, komme. Eben so werden die Producte aus den Ziffern der folgenden höhern Ordnungen des Multiplicators in den Multiplicandus gefunden und unter den Strich geschrieben. Endlich werden alle diese Producte in eine Summe gebracht, welche das gesuchte ganze Product giebt.

Z. B. Es sollen folgende beyde Zahlen mit einander multiplicirt werden:

4658
342
9316
18632
13974
Product 1593036

Das unter den untern Strich gesetzte Product ist also gefunden worden. Das Product aus 2 in den Multiplicandus 4658 ist 9316, welches zuerst unter den obern Strich geschrieben worden. Das Product aus 4 in den Multiplicandus ist 18632, welches ebenfalls unter den Strich geschrieben worden, aber so, daß die 2 gerade unter die 4 des

Mul-

Multiplicators gekommen, weil man eigentlich nicht hätte sagen sollen 4 mal 8 ist 32, sondern 40 mal 8 ist 320 u. s. w. daher die Stelle der Einer leer bleiben mußte. Eben so ist das Product aus der 3 in den Multiplicandus, nemlich 13974 so geschrieben worden, daß die 4 unter die 3 des Multiplicators in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte sagen sollen 300 mal 8 ist 2400 u. s. w. Die Summe aus diesen dreyen einzelnen Producten aber, 1593036, ist das gesuchte ganze Product.

Beyspiele zur Uebung.

72835	3682	4380260
5364	120400	39250
291340	1472800	219010000
437010	7364	87604
218505	3682	394218
364175	443312800	131406
390686940		171922850000

Anmerk. 1) In den beyden letzten gegebenen Beyspielen sind wegen der in den Factoren vorkommenden Nullen theils diese Factoren, theils ihre einzelne Producte sogleich so gesetzt worden, daß man nicht nöthig hatte, eine Menge überflüssiger Nullen zu machen, ohne doch in den Stellen der Ziffern zu fehlen.

2) Weil man das Product aus einer Ziffer in eine andere nicht sogleich an den Fingern abzählen kann, wie bey dem Addiren und Subtrahiren möglich ist; so hat man diese Producte in ein Verzeichniß, welches das Einmaleins genannt wird, gebracht. Es kann dasselbe am bequemsten in folgendem Täflein vorgestellt werden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dieſes Täflein iſt alſo verfertigt worden. Es ſind die neun Ziffern in die oberſte Reihe nach der Breite des Papiers und auch in die vorderſte Reihe nach der Länge des Papiers herunter geſchrieben worden. Hierauf iſt jede Zahl in der oberſten Querreihe achtmal nach einander zu ſich ſelbſt addirt und die Summe in die unter der Zahl der Länge nach herabgehenden Abtheilungen geſchrieben worden. Z. B. 2 und 2 iſt 4, dieſe 4 iſt unter die 2 der oberſten Reihe geſetzt, 4 und 2 iſt 6, dieſe 6 ſteht unter der 4, 6 und 2 iſt 8, dieſe 8 ſtehet unter der 6 u. ſ. w. Der Gebrauch dieſes Täfleins beſteht darin, daß, wenn man das Product aus einer Ziffer in eine andere, z. B. aus 6 in 8, wiſſen will, man die eine, als hier 6, nur in der vorderſten, die andere, als hier 8, in der oberſten Reihe aufſuche, alsdenn aber mit dem einen Finger in der Reihe, die ſich mit der 6 anfängt, nach der Breite des Papiers, mit dem andern Finger aber in der Reihe, die ſich mit der 8 anfängt, nach der Länge des Papiers fortgehe; da, wo nun beyde Finger zuſammentreffen, oder in dem gemeinſchaftlichen Fache beyder Reihen, ſteht 48, und dieſes iſt das geſuchte Product aus 6 in 8.

Zweyter Fall. Wenn einer der beyden Factoren, oder beyde zugleich Decimalſtellen haben.

In dieſem Fall wird zuvörderſt der Multiplicandus durch den Multiplicator genau nach den vorigen Regeln als Ganze multiplicirt, ohne während der Multiplication die Decimalbrüche von den Ganzen zu unterſcheiden. Dem alſo gefundenen Product gibt man hierauf ſo viele Decimalſtellen, als in beyden Factoren zuſammen ſich befinden, da denn im erforderlichen Fall die leeren Stellen mit Nullen auszufüllen ſind. Das alſo veränderte Product iſt das geſuchte.

Beyſpiele.

I.	II.	III.	IV.
4,32	432	4,32	0,0432
34	34	34	0,034
1728	1728	1728	1728
1296	1296	1296	1296
Pr. 146,88	Pr. 14688	Pr. 14,688	Pr. 0,0014688

Dieſe

Diese Producte sind hier also gefunden worden. Es ist zuvörderst in allen vier Beyspielen die Multiplication genau nach den obigen Regeln ohne Rücksicht auf die durch das Comma und dessen verschiedene Stelle veränderte Bedeutung der Zahlen verrichtet worden, nemlich durchgängig so, als wären 432 Ganze mit 34 Ganzen zu multipliciren. Dadurch ist in allen vier Beyspielen das Product 14688 entstanden. Da nun 1) in dem ersten Beyspiel der Multiplicandus zwey Decimalstellen, der Multiplicator aber keine hat; so sind dem Product ebenfalls zwey Decimalstellen, und zwar dadurch gegeben worden, daß nach der zweyten Stelle, (von der Rechten gegen die Linke) das Comma gesetzt ist; das auf diese Art veränderte Product 146,88 ist das gesuchte. Da ferner 2) in dem zweyten Beyspiel der Multiplicator eine, der Multiplicandus aber keine Decimalstelle hat; so ist dem Product 14688 auf die vorige Art nur eine Decimalstelle gegeben worden, daher 1468,8 das gesuchte Product ist. Da ferner 3) in dem dritten Beyspiel der Multiplicandus zwey, der Multiplicator eine, beyde zusammen also drey Decimalstellen haben; so hat das Product 14688 auch drey Decimalstellen erhalten, und 14,688 ist das gesuchte Product. Da endlich 4) in dem vierten Beyspiel der Multiplicandus vier, der Multiplicator drey, beyde zusammen also sieben Decimalstellen haben; so muß das Product ebenfalls 7 Decimalstellen erhalten. Da nun dasselbe nur aus 5 Ziffern besteht; müssen noch, um dem Comma seine gehörige Stelle zu geben, zwey Stellen zur Linken der 5 Ziffern gemacht, und in dieselben, weil sie leer sind, Nullen gesetzt werden, da denn das Comma seine gehörige Stelle erhalten kann. Das also veränderte Product 0,0014688 ist das gesuchte.

Anmerk. Dieses Verfahren beruhet auf folgenden Betrachtungen. (1) Wenn in dem obigen ersten Beyspiel der Multiplicandus wirklich 432, und wenn in dem zweyten Beyspiel der Multiplicator wirklich 34 wäre, wie während der Multiplication in beyden Beyspielen vorausgesetzt ist; so würde 14688 in beyden Fällen das richtige Product seyn. Aber im ersten Beyspiel ist der Multiplicandus nur 4,32; d. i. er ist hundertmal kleiner, als 432 und im zweyten Beyspiel ist der Multiplicator nur 3,4; d. i. er ist zehnmal kleiner als 34. Folglich bedarf das Product in beyden Beyspielen einer Berichtigung. (2) Wie nun die Hälfte einer Zahl ein zweymal kleineres, der dritte Theil derselben ein dreymal kleineres, der vierte Theil ein viermal kleineres u. s. w. Product giebt, wenn der Multiplicator derselbe ist, (wie aus folgenden Beyspielen sich leicht übersehen läßt,

24	12	8	6
3	3	3	3
72	36	24	18

wo zuvörderst 24, darnach die Hälfte von 24, nemlich 12, ferner der dritte Theil 8, endlich der vierte Theil 6, mit 3 multiplicirt sind, und wo daher auch die Producte 36 die Hälfte, 24 der dritte, und 18 der vierte Theil von dem Product 72 sind); so wird auch der zehnte Theil einer Zahl ein zehnmal kleineres, der hundertste Theil ein hundertmal kleineres, der tausendste Theil ein tausendmal kleineres u. s. w. Product geben, wenn der Multiplicator derselbe ist; d. i. je nachdem der Multiplicandus eine, oder zwey, oder drey ꝛc. Decimalstellen hat; je nachdem muß das zu berichtigende Product auch eine, oder zwey, oder drey Decimalstellen erhalten. Hieraus erhellt die Richtigkeit des Verfahrens im obigen ersten Beyspiel. (3) Wir ferner, wenn eine Zahl nur mit der Hälfte, oder dritten, oder vierten ꝛc. Theil einer andern multiplicirt wird, auch nur ein zweymal, oder dreymal, oder viermal kleineres Product entstehn kann, (wie sich wiederum aus folgenden Beyspielen leicht übersehen läßt;

6	6	6	6
12	6	4	3
72	36	24	18

wo die Zahl 6 zuvörderst mit 12, darauf mit der Hälfte, hernach mit dem dritten, und endlich mit dem vierten Theil von 12 multiplicirt ist, und wo daher auch die Producte 36 zweymal, 24 dreymal, 18 viermal kleiner sind als das Product 72); so wird auch, je nachdem eine Zahl nur mit dem zehnten, oder hundertsten, oder tausendsten ꝛc. Theil einer andern multiplicirt wird, nur ein zehnmal, oder hundertmal, oder tausendmal ꝛc. kleineres Product herauskommen; d. i. je nachdem der Multiplicator eine, oder zwey, oder drey ꝛc. Decimalstellen hat, je nachdem muß auch das zu berichtigende Product eine, oder zwey, oder drey ꝛc. Decimalstellen erhalten. Hieraus erhellet die Richtigkeit des Verfahrens in dem zweyten Beyspiel. (4) In dem dritten Beyspiel, wo wiederum während der Multiplication vorausgesetzt worden ist, es sey 432 mit 34 zu multipliciren, bedarf das also gefundene Product 14688 einer doppelten Berichtigung. Um des Multiplicandus willen muß es hundertmal, und um des Multiplicators willen noch zehnmal, überhaupt also zehnmal hundert, d. i. tausendmal kleiner gemacht werden; oder es muß wegen des Multiplicandus zwey, und wegen des Multiplicators eine, überhaupt also drey Decimalstellen erhalten. (5) Eben diese Schlüsse gelten bey dem obigen vierten, und ähnliche Schlüsse gelten bey allen ähnlichen Beyspielen.

Beyspiele zur Uebung.

4,03004	0,00026	3400	2700
0,024	0,12	0,3	0,06
16120 16	52	1020,0	162,00
806008	26		
0,09672096	0,00003 12		

In dem dritten und vierten dieser Beyspiele mußten dem Product wegen des Multiplicandus zwey Nullen angehängt werden, von welchen aber wegen des Multiplicators im dritten Beyspiel eine, und im vierten beyde Nullen in die Stelle der Decimalbrüche zu setzen waren. In dergleichen Fällen werden sie ganz weggelassen. Das Product im dritten Beyspiel ist nemlich 1020, und im vierten 162.

Anmerk. Aus 2 Factoren entsteht einerley Product, es mag der erste durch den andern, oder dieser durch jenen multiplicirt werden. Z. B. 3mal 8 ist 24, und 8mal 3 ist gleichfalls 24. Wenn mehrere Factoren, z. B. die Zahlen 3, 6, 2, 5, mit einander multiplicirt werden sollen, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung dieselben multiplicirt werden, und es kommt einerley Product heraus, es mag zuerst 3 mit 6, das Product mit 2, und darauf mit 5, oder es mag zuerst 5 mit 6, das Product mit 2, und darauf mit 5, oder es mag zuerst 5 mit 6, das Product mit 2, und hierauf mit 3, oder in irgend einer andern Ordnung multiplicirt werden.

15. *Wie wird eine Zahl durch eine andere dividirt?

Erster Fall. Wenn der Dividendus und Divisor keine Decimalbrüche enthalten.

1) Zur Vorbereitung macht man von dem gegebenen Divisor alle Vielfachen desselben von 1 bis 9, d. i. man multiplicirt denselben nach und nach mit 1, 2, 3, u. s. w. bis 9, und legt sich die auf diese Art verfertigte Tafel der Vielfachen während der Division zur Hand.

Z. B. Es sollen die Zahlen 8612370 und 226984680268, jede durch 234 dividiret werden; so werden zuvörderst die Vielfachen von 234 gemacht, und diese so unter einander gesetzt, wie unten bey der Vorstellung der Rechnung dieser beyden Beyspiele zu sehn ist.

2) Man zählt hierauf von den höchsten Ziffern des Dividendus so viele Ziffern ab, als der Divisor hat, und sucht in der Tafel das gröſte unter den Vielfachen auf, welches sich von diesen Ziffern abziehn läßt. Findet sich ein solches unter denselben; so zieht man dieses Vielfache wirklich ab, und schreibt hinter einen zur Rechten des Dividendus gemachten Strich die Zahl des Vielfachen, welches abgezogen worden ist. Die Zahl ist die **erste** und zwar die höchste **Zahl des Quotienten**. Im Fall aber die abgezählten höchsten Ziffern des Dividendus zu klein sind, so daß auch nicht das einfache des Divisors von denselben abgezogen werden kann; so wird die nächste Ziffer des Dividendus noch dazu genommen, hierauf wieder das höchste Vielfache in der Tafel aufgesucht, welches abgezogen werden kann, und sodann, wie vorhin verfahren.

In den unten gegebenen Beyspielen besteht der Divisor 234 aus 3 Ziffern. Es werden also von jedem Dividendus die höchsten 3 Ziffern abgezählt. Diese sind bey dem ersten Beyspiel 861. Von diesen kann kein höheres als das Dreyfache des Divisors, welches 702 ist, abgezogen werden. Diese 702 sind daher wirklich abgezogen, und es ist 159 zum Rest geblieben. Ferner ist hinter den Strich zuerst eine 3 gesetzt, welche anzeigt, daß zuvörderst das Dreyfache des Divisors abgezogen ist. In dem zweyten Beyspiel sind die höchsten drey Ziffern 226; von diesen kann keins der Vielfachen des Divisors abgezogen werden, daher sind die vier höchsten Ziffern des Divisors 2269 genommen worden, von welchen sich das neunfache, welches 2106 ist, abziehn läßt. Der Abzug ist wirklich geschehn, und der Rest 163 gefunden, auch ist 9 hinter den Strich gesetzt worden.

3) Zu dem durch den Abzug des Vielfachen gefundenen Rest, setzt man die nächste folgende Ziffer des Dividendus, sucht hierauf wieder das höchste Vielfache des Divisors auf, welches sich von dem also vermehrten

mehrten Rest abziehen läßt; subtrahirt sodenn wirklich, und setzt hinter den Strich, zur Rechten der ersten Zahl des Quotienten, die Zahl des von neuen abgezogenen Vielfachen des Divisors. Diese Zahl ist die **zweyte** nächstniedrige Zahl des Quotienten. Mit dem von neuen gefundenen Rest verfährt man sodenn genau wieder auf die eben gezeigte Art, und eben so, mit jedem folgenden Rest. Auf diese Art findet man die **dritte, vierte, fünfte**, u. s. w. Zahl des Quotienten, bis sämmtliche Ziffern des Dividendus bey der Rechnung gebraucht sind, da denn die Division geendigt ist. Wenn aber irgend ein durch die hinzugesetzte nächstfolgende Ziffer des Dividendus vermehrter Rest kleiner ist, als der Divisor, so daß derselbe so wenig als irgend ein Vielfaches desselben abgezogen werden kann; so wird hinter den Strich neben die schon gefundenen Zahlen des Quotienten eine Null gesetzt, und hierauf sogleich die nächstfolgende Ziffer des Dividendus zu dem Rest gesetzt, da denn, wie vorhin, weiter verfahren wird. Sollte aber auch der also von neuen vermehrte Rest noch zu klein seyn, so wird das eben gezeigte Verfahren so lange wiederholt, bis ein Abzug geschehen kann.

Zu dem Rest 159 in dem ersten Beyspiel ist die nächstniedrige Ziffer des Dividendus 2 gesetzt worden; wodurch die Zahl 1592 als der vermehrte Rest entstanden ist. Das höchste Vielfache des Divisors, welches von 1592 abgezogen werden kann, ist das sechsfache, nemlich 1404; dieses ist daher wirklich abgezogen, und die Zahl 6 ist hinter den Strich neben die 3 geschrieben worden. Der von neuen gefundene Rest ist 188, dieser ist wiederum mit der nächstniedrigen Ziffer des Dividendus 3 vermehrt worden; wodurch die Zahl 1883 entstanden ist. Das höchste Vielfache, welches hievon abgezogen werden kann, ist das achtfache, nemlich 1872, daher 8 neben die 6 hinter den Strich geschrieben, und 1872 wirklich abgezogen ist. Der Rest ist 11, und wenn die nächste Ziffer des Dividendus 7 hinzugesetzt wird, 117.

Diese Zahl ist kleiner als selbst das einfache des Divisors, und ist also hier kein Abzug möglich. Daher ist neben die 8 hinter den Strich eine 0 gesetzt, und der zu kleine Rest sogleich mit der folgenden Ziffer des Dividendus, welche hier 0 ist, vermehrt worden, wodurch 1170 entstanden ist. Von dieser Zahl kann das fünffache des Divisors abgezogen werden, und ist daher noch 5 neben die 0 hinter den Strich gesetzt. Der Rest ist 0, und weil keine Ziffer des Dividendus mehr übrig ist; so ist die Rechnung geendigt.

In dem zweyten Beyspiel war der erste Rest 163; vermehrt ist er 1638, davon ist das siebenfache des Divisors abgezogen, und 7 hinter den Strich neben die 9 gesetzt worden. Der Rest ist 0, daher ist die nächstfolgende Ziffer 4 des Dividendus zuvörderst allein neben die Stelle des Rests, und weil von derselben kein Abzug des Divisors möglich ist, eine Null hinter den Strich neben die 7, hierauf aber neben die 4 in der Stelle des Rests, die nächstfolgende Ziffer 6 des Dividendus gesetzt worden. Von der dadurch entstandenen Zahl 46 kann der Divisor ebenfalls nicht abgezogen werden. Es ist daher neben die vorige noch eine Null in den Ort des Quotienten, und darauf wieder die nächstfolgende Ziffer des Dividendus 8 neben die Zahl 46 gesetzt worden. Von 468 kann das doppelte des Divisors abgezogen werden. Dieses ist wirklich geschehn, und die 2 neben die zweyte Null hinter den Strich gesetzt worden. Der Rest ist 0, und die nächstfolgende Ziffer des Dividendus ist auch 0, welche, weil nicht nur kein Abzug von ihr möglich ist, sondern sie auch bey dem folgenden Abzuge nichts gilt, gar nicht hingesetzt ist. Jedoch ist hinter den Strich neben die 2 eine Null gesetzt worden. Hierauf ist die folgende Ziffer des Dividendus 2 neben die Stelle des Rests, und weil wieder kein Abzug möglich ist, eine zweyte Null hinter den Strich neben die vorige, darnach die folgende Ziffer 6 des Dividendus zu der 2 gesetzt worden. Von 26 ist wiederum kein Abzug des Divisors möglich, daher ist noch eine dritte Null neben die beyden vorigen hinter den Strich, zu der Zahl 26 aber noch die folgende Ziffer des Dividendus 8 gesetzt worden. Von 268 kann nur das einfache des Divisors d. i. der Divisor selbst abgezogen werden, daher 1 hinter den Strich gesetzt, und der Abzug wirklich geschehn ist. Da nunmehro keine niedrigere Ziffer des Dividendus mehr vorhanden ist; so ist die Division vollendet.

4) Wenn nach vollendeter Division kein Rest übrig bleibt, so ist die hinter dem Strich neben dem Dividendus stehende Zahl der vollständige Quotient. Bleibt aber ein Rest übrig, so wird in der gemeinen Arithmetik bey unbenannten Zahlen die noch fortzusetzende Division in den letzten Rest blos durch das oben angegebene Zeichen eines Strichs angedeutet, und der also bezeichnete Ausdruck neben die gefundene Zahl hinter den Strich gesetzt, da denn, was hinter dem Strich steht, der vollständige Quotient ist.

In dem ersten Beyspiel ist der letzte Rest 0, welches anzeigt, daß der Divisor in dem Dividendus genau 36805 mal enthalten ist, daher ist 36805 der vollständige Quotient; in dem zweyten Beyspiel ist der Rest 34, daher ist $970020001\frac{34}{234}$ der vollständige Quotient.

Anmerk. Der auf diese Art entstehende zweyte Theil des Quotienten ist ein Bruch, und es bedeutet z. B. der vollständige Quotient im zweyten Beyspiel, daß der Divisor im Dividendus 970 Millionen 20 Tausend und 1 mal völlig, außer dem aber noch der 234ste Theil des Divisors, welcher 1 ist, 34mal im Dividendus enthalten sey.

Erstes Beyspiel.

Tafel der Vielfachen des Divisors.		Divisor.	Dividendus.	Quotient.
1	234	234)	8612370	
2	468		702....	36805
3	702			
4	936		1592...	
5	1170		1404:..	
6	1404			
7	1638		1883..	
8	1872		1872..	
9	2106			
			1170	
			1170	
			0	

Zweytes Beyspiel.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
234)	226984680268	$970020001\frac{34}{234}$
	2106	
	1638	
	1638	
	468	
	468	
	268	
	234	
	34	

Anmerk. 1) Es ist bey den hier gegebenen Regeln der Division vorausgesetzt worden, daß der Dividendus größer, oder wenigstens nicht kleiner als der Divisor sey, weil dieser Fall der gewöhnlichste ist. Sind beyde, der Dividendus und der Divisor, einander gleich; so ist der Quotient 1. Ist aber der Dividendus kleiner als der Divisor, wie wenn z. B. die Zahl 12 durch 17 zu dividiren ist; so wird der Quotient durch $\frac{12}{17}$ ausgedruckt, welches gleichfalls einen Bruch bedeutet, und anzeigt, daß 17 nicht ganz, sondern nur der siebzehnte Theil von 17, d. i. 1, in der Zahl 12 zwölfmal enthalten sey. In der Lehre von den Brüchen wird dies auf andere Art noch deutlicher gemacht werden können.

2) Das obige erste Beyspiel hat nach den im vorhergehenden angezeigten Gesetzen der Bedeutung der Ziffern nach ihren verschiedenen Stellen eigentlich folgende Gestalt:

234)	8612370	30000
	7020000	6000
		800
	1592370	00
	1404000	4
	188370	
	187200	
	1170	
	1170	
	0	

Da nemlich zuvörderst bey dem ersten Abzuge die niedrigste Ziffer 2 des dreyfachen des Divisors 702 in die fünfte Stelle gesetzt ist; so ist dasselbe dadurch zehntausendmal größer gemacht, folglich ist eigentlich das dreymal zehntausendfache oder das 30tausendfache des Divisors abgezogen worden; eben

eben so erhellt, daß bey der zweyten Subtraction das 6000fache, bey der dritten das 800fache des Divisors abgezogen worden ist. Das zehnfache des Divisors konnte nicht abgezogen werden, daher in die Stelle der Zehner eine Null gesetzt werden mußte. Zuletzt ist noch das 5fache des Divisors abgezogen worden. Auf eine ähnliche Art müßte bey allen ähnlichen Divisionen verfahren werden. Da indessen nach den gegebenen Regeln jede Zahl ohnehin ihre richtige Stelle erhält; so werden die Nullen nicht hingeschrieben, und weil, außer den Fällen, wo eine oder mehrere Nullen in den Quotienten kommen, nur allemal eine nächstfolgende Ziffer des Dividendus bey jedem Abzuge eines Vielfachen gebraucht wird, so werden auch die übrigen Ziffern des Dividendus nicht jedesmal neben den neuen Rest geschrieben. Diese Anmerkung dient zugleich, um die Gründe der gegebenen Regeln der Division zu übersehen.

3) Wenn der Quotient mit dem Divisor multiplicirt wird, so giebt das Product den Dividendus, und folglich giebt auch, wenn ein Product mit dem einen Factor dividirt wird, der Quotient den andern Factor. Daher dienen die Multiplication und Division einander gegenseitig zur Probe. Im Fall demnach der Quotient aus zwey Theilen, wie bey dem obigen zweyten Beyspiel besteht; so müssen auch beyde Theile multiplicirt werden, welches die Kenntniß der Rechnung mit Brüchen voraussetzt, wovon die Regeln im folgenden gegeben werden sollen. Indessen wird auch hier die Probe dadurch gemacht, daß man die ganze Zahl des Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und zu dem Product den bey der Division übrig gebliebenen letzten Rest addirt, da denn der Dividendus herauskommen muß. Z. B. Wenn in dem vorhergehenden Beyspiel der Quotient 970020001 mit dem Divisor 234 multiplicirt und der Rest 34 zu dem Product addirt worden, so erhält man den Dividendus 226984680268. Ingleichen wenn in dem obigen letzten Beyspiel der Multiplication das Product 1719228500000 mit dem einen Factor 39250 dividirt wird, so ist der Quotient 4380200 dem andern Factor gleich.

4) Wenn daher eine Zahl mit einer andern multiplicirt, und das Product mit derselben Zahl wieder dividirt werden soll, so bleibt die Zahl ungeändert. Z. B. Wenn 24 mit 3 multiplicirt und das Product 72 wieder mit 3 dividirt wird, so ist der Quotient wieder 24.

5) Auch erhellt aus der dritten Anmerkung, daß der Dividendus so vielmal größer, als der Quotient sey, so viel Einheiten der Divisor enthält, und der Divisor zeigt an, der wievielste Theil der Quotient von dem Dividendus ist. Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt daher auch, sie in so viel gleiche Theile theilen, als der Divisor anzeigt, und einen dieser gleichen Theile bestimmen. Z. B. Wenn 24 durch 8 dividirt wird; so ist 3 der Quotient, und es ist 24 achtmal größer als 3, ferner 3 ist der

achte

achte Theil von 24, und durch die Division ist 24 in 8 gleiche Theile getheilt, davon jeder Theil so groß als 2 ist.

6) Wenn der Divisor eine kleine Zahl ist; so läßt sich bey einiger Uebung durch Hülfe des Einmaleins leicht eine Fertigkeit erhalten, diejenigen höchsten Vielfachen des Divisors zu finden, welche bey jedem Rest abgezogen werden können, ohne jedesmal die Tafel der Vielfachen verfertigen zu dürfen. Es ist indessen besser, Anfänger mit den mancherley Vorsichtsregeln zu verschonen, welche hiebey zu beobachten sind. Ist der Divisor eine einzelne Ziffer, so findet sich der Quotient leicht, ohne die Vielfachen desselben, welche jedesmal abzuziehn sind, hinzuschreiben. Zur Erläuterung dient folgendes Beyspiel:

575572
69573544 Dividendus.
Divisor 8)
8696693 Quotient.

Hier sind die Vielfachen von 8 sogleich in Gedanken subtrahirt, und der Rest jedesmal neben die folgende Zahl des Dividendus mit kleinen Zahlen gesetzt worden.

Zweyter Fall. Wenn der Divisor oder Dividendus, oder beyde zugleich Decimalbrüche enthalten.

1) Wenn der **Divisor** nur Ganze, der **Dividendus** aber Ganze und **Decimalbrüche** oder auch nur blos **Decimalbrüche** enthält; so dividirt man mit dem Divisor in den Dividendus genau nach den vorhin gegebenen Regeln so, als wenn derselbe ebenfalls nur Ganze enthielte. Dem gefundenen Quotienten giebt man hierauf so viele Decimalstellen, als der Dividendus hat.

Z. B. Es sey die Zahl 1832,688 mit 234 zu dividiren, so ist die Rechnung nach den oben schon gefundenen Vielfachen des Divisors folgende:

234) 1832,688 | 7,832
1638 ...
1946..
1872..
748.
702.
468
468
0

Hier ist der Quotient 7832 genau nach den obigen Regeln gefunden worden. Da aber der Dividendus 3 Decimalstellen hat; so sind dem gefundenen Quotienten nach vollendeter Rechnung ebenfalls, durch gehörige Stellung des Comma, 3 Decimalstellen gegeben worden. Die Zahl 7,832, welche 7 Ganze und 832 Tausendtheile bedeutet, ist der gesuchte Quotient.

Anmerk. Eine Zahl ist nemlich in der Hälfte einer andern Zahl nur halb so oft, in dem dritten Theil derselben dreymal weniger, in dem vierten viermal weniger u. s. w. folglich auch in dem zehnten Theil zehnmal, in dem hundertsten Theil hundertmal weniger enthalten. Daher muß bey einerley Division der Quotient halb so groß seyn, wenn der Dividendus um die Hälfte kleiner ist; der Quotient muß dreymal, viermal ꝛc. folglich auch zehnmal, hundertmal ꝛc. kleiner seyn, wenn der Dividendus dreymal, viermal ꝛc. oder zehnmal, hundertmal ꝛc. kleiner ist. Z. B.

$\frac{96}{8} = 12$; $\frac{48}{8} = 6$; $\frac{32}{8} = 4$; $\frac{24}{8} = 3$;

d. i. Wenn der Dividendus 96 und der Divisor 8 ist; so ist der Quotient 12. Wenn der Dividendus 48, folglich die Hälfte von 96 ist, so ist der Quotient 6, welches auch nur die Hälfte des vorigen Quotienten 12 ist. Und so wie 32 dreymal und 24 viermal kleiner als 96 ist, so ist auch der Quotient 4 dreymal und der Quotient 3 viermal kleiner als 12. In dem obigen Beyspiel beruht also die Richtigkeit des Verfahrens auf folgendem. Wäre der Dividendus wirklich 1832688, wie dies während der Division vorausgesetzt worden ist, so würde 7832 der richtige Quotient seyn. Nun ist aber der Dividendus tausendmal kleiner, als der angenommene, folglich wird der gesuchte Quotient ebenfalls tausendmal kleiner seyn, als der gefundene; daher er tausendmal kleiner gemacht worden mußte. Aehnliche Schlüsse gelten bey allen ähnlichen Beyspielen.

2) Wenn

2) Wenn der Divisor ebenfalls Decimalstellen hat, so wird zuvörderst zur Vorbereitung der Divisor sowol als der Dividendus nach den im vorhergehenden gegebenen Regeln so vielmal größer gemacht, als nöthig ist, um aus dem Divisor eine völlig ganze Zahl zu erhalten. Hierauf wird nach den vorhin gegebenen Regeln dividirt. Der dadurch gefundene Quotient ist der gesuchte.

Beyspiele.

1) Es sey die Zahl 13,97448 mit 2,34 zu dividiren; so muß zuvörderst der Divisor und der Dividendus jeder hundertmal größer gemacht werden, damit der Divisor nur blos Ganze enthalte. Demnach wird der Divisor 2,34 in 234, und der Dividendus 13,97448 in 1397,448 verwandelt. Hierauf ist die Rechnung folgende:

```
234) 1397,448 | 5,972
     1170 ... |
     ---------
      2274 ..
      2106 ..
     ---------
       1684 .
       1638 .
     ---------
         468
         468
     ---------
           0
```

Der Quotient ist nach dem vorhergehenden 5,972; und dieser Quotient ist völlig einerley mit demjenigen, welcher herauskommen würde, wenn die Zahl 13,97448 mit 2,34 nach andern Regeln, welche in der Mathematik gegeben werden, unmittelbar dividirt würde.

2) Es sey die Zahl 139744,8 mit 0,234 zu dividiren, welche beyde Zahlen mit den Zahlen des vorigen Beyspiels einerley Ziffern, jedoch von verschiedenem Werthe, haben. Hier müssen zuvörderst Divisor und Dividendus tausendmal größer gemacht werden, wodurch der Divisor eine ganze Zahl, nemlich 234, der Dividendus aber 139744800 wird. Wird nun dieser also veränderte Dividendus durch den gleichfalls veränderten Divisor dividirt; so kommt 597200 zum Quotienten. Dieser Quotient ist auch derselbe, welcher herauskommen würde, wenn die Zahl 139744,8 mit 0,234 unmittelbar dividirt würde.

Anmerk.

Anmerk. 1) Wenn der Dividendus und Divisor gleichviel mal gröſſer gemacht werden; ſo bleibt der Quotient ungeändert. Z. B.

$\frac{24}{8}=3$; $\frac{48}{16}=3$; $\frac{72}{24}=3$; $\frac{240}{80}=3$; $\frac{2400}{800}=3$;

D. i. Es kommt einerley Quotient, nemlich 3 heraus, man mag die Zahl 24 durch 8; oder 48, welches zweymal ſo groß als 24 iſt, durch 16, welches zweymal ſo groß als 8 iſt; oder 72, d. i. das dreyfache von 24 durch 24, das dreyfache von 8 u. ſ. w. dividiren. Hieraus erhellt die Richtigkeit der hier gegebenen Regel der Diviſion.

2) Auch bleibt der Quotient ungeändert, wenn der Dividendus und Divisor gleich vielmal kleiner gemacht werden. Z. B.

$\frac{72}{12}=6$; $\frac{36}{6}=6$; $\frac{24}{4}=6$; $\frac{18}{3}=6$; $\frac{7,2}{1,2}=6$;

D. i. Es kommt einerley Quotient, nemlich 6, heraus, man mag die Zahl 72 durch 12, oder die Hälfte von 72, nemlich 36, durch die Hälfte von 12, nemlich 6; oder den dritten Theil von 72, d. i. 24, durch den dritten Theil von 12, d. i. 4 u. ſ. w. dividiren. Hieraus läßt ſich ſchlieſſen, daß auch einerley Quotient herauskommen müſſe, wenn man den zehnten, hundertſten, tauſendſten u. ſ. w. Theil des Dividendus durch den eben ſo vielmal kleineren Theil des Divisors dividirt. Hierauf gründet ſich die Regel, daß, wenn der Divisor und Dividendus am Ende Nullen haben, in beyden gleich viele Nullen gegen einander weggeſtrichen werden können, ohne daß der alsdenn gefundene Quotient von dem geſuchten verſchieden ſey. Z. B. Es ſoll die Zahl 4865000 durch 500 dividirt werden, ſo darf man nur 48650 durch 5 dividiren, indem man im Divisor und Dividendus zwey Nullen wegläßt. Der Quotient iſt 9734; und eben derſelbe Quotient kommt auch heraus, wenn die Zahl 4865000 durch 500 dividirt wird. Es ſey ferner 685300 durch 600 zu dividiren, ſo darf man nur 6853 durch 6 dividiren, der geforderte Quotient iſt $1142\frac{1}{6}$.

3) Wenn zwar der Divisor am Ende Nullen hat, aber nicht der Dividendus; ſo kann man ebenfalls die Nullen des Divisors entweder dadurch wegſchaffen, daß man den Dividendus durch gehörige Stellung des Comma eben ſo vielmal kleiner macht, als der Divisor wird, wenn die Nullen am Ende deſſelben weggelaſſen werden; oder, wenn man nicht mit Decimalbrüchen rechnen will, ſo darf man nur ſo viel Ziffern am Ende des Dividendus bey der Rechnung weglaſſen, als im Divisor Nullen wegzulaſſen ſind. Jedoch müſſen in dieſem Fall die weggelaſſenen Ziffern des Dividendus wieder zum Reſt geſetzt, und aus dieſem Reſt

nun

muß der zweyte Theil des Quotienten so gemacht werden, als wäre mit dem gegebenen Divisor dividirt worden.

Z. B. Es sey 563952 durch 24000 zu dividiren, so ist die Rechnung nach beyden Arten folgende:

I.

24)563,952 | 23,498
48

83
72

119
96

235
216

192
192

0

II.

24000)563952 | 11952
48 | 23
---
83 | 24000
72

11952

In beyden Quotienten sind die Ganzen einerley, nemlich 23, der zweyte Theil des Quotienten nach der ersten Rechnung, nemlich 0,498, ist den Ziffern nach zwar verschieden von dem Bruch $\frac{11952}{24000}$ in dem andern Quotienten. Aus der Rechnung mit Brüchen wird aber in der Folge erhellen, daß die Zahlen selbst, welche durch die Ziffern angezeigt werden, einerley sind. Noch einige hieher gehörige Anmerkungen und Beyspiele werden im folgenden bey der Lehre von den Brüchen gegeben werden, wo sie leichter verständlich zu machen sind.

4) Wenn zwey oder mehr Zahlen zu addiren oder zu subtrahiren, ferner mit einer andern Zahl zu multipliciren, und wiederum mit einer andern zu dividiren sind; so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Rechnung geschieht. Z. B. Es seien die Zahlen 16 und 12 zu addiren, hierauf mit 3 zu multipliciren, und sodann mit 4 zu dividiren, so kann auch zuvörderst multiplicirt, hierauf addirt und sodann dividirt oder auch zuvörderst dividirt, sodann multiplicirt und hierauf addirt werden, welches durch die Zeichen der Rechnungsarten kürzer folgendergestalt ausgedrückt werden kann,

$$\frac{(16+12)\times 3}{4} = \frac{16\times 3+12\times 3}{4} = \left(\frac{16+12}{4}\right)\times 3.$$

Wenn zwey oder mehr Zahlen zu multipliciren sind, und das

das Product mit einer andern Zahl zu dividiren ist; so kann auch blos einer der Factoren dividirt, und mit dem Quotienten an seiner Stelle multiplicirt werden. Z. B.

Es sey folgende Rechnung zu machen: $\frac{24 \times 8}{6}$; so kann zuvörderst 24 durch 6 dividirt werden, da alsdenn der Quotient 4 mit 8 zu multipliciren ist. Diese und andere Sätze, welche sich hieraus leicht herleiten lassen, dienen oft zur vortheilhaften Verkürzung der Rechnung.

Die benannten Zahlen.

16. *Was ist von den benannten Zahlen zu bemerken?

Es werden dieselben eben so wie die unbenannten addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, nur ist dabey zu bemerken, daß hier gemeiniglich verschiedene Einheiten vorkommen, daher man wissen muß, wie viel kleinere Einheiten eine größere enthält, auch die Zahlen von einerley Einheit gehörig unter einander zu setzen hat, wie aus folgenden Beyspielen deutlich erhellt.

Das Addiren.

Es sollen folgende Posten, die sogleich gehörig unter einander, nemlich Thaler unter Thaler, Groschen unter Groschen, Pfennige unter Pfennige gesetzt sind, addirt werden.

246 rthlr.	18 ggr.	4 pf.		
520 —	8. —	7 —	12) 28 pf. (2 ggr.	
364 —	12. —	8 —	4 pf.	
472. —	20 —	3 —	24) 74 ggr. (3 rthlr.	
750 —	14 —	6 —	2 ggr.	
2355 rthlr.	2 ggr.	4 pf.		

Die unter den Strich gesetzte Summe ist also gefunden worden. Es ist bekannt, daß ein Thaler 24 Groschen und ein Groschen 12 Pfennige enthalte. Dies vorausgesetzt, sind zuerst alle Pfennige eben so wie unbenannte Zahlen in eine Summe gebracht worden. Die Summe war 28. Da nun diese schon Groschen beträgt, oder einige solche größere Einheiten,

heiten, deren jede aus 12 kleinern besteht, enthält: so ist sie durch 12 dividirt worden. Der Quotient 2 zeigt an, wieviel Groschen, der Rest 4 aber, wieviel Pfennige über 2 Groschen in 28 Pfennigen enthalten sind. Die 4 ist daher unter die Pfennige geschrieben, die 2 aber zu den Groschen addirt, deren Summe 74 beträgt. Da nun diese schon Thaler oder wieder größere Einheiten, deren jede aus 24 kleinern besteht, enthält, so ist sie durch 24 dividirt worden. Der Quotient 3 zeigt an, wieviel Thaler, der Rest 2 aber, wieviel Groschen über 3 Thaler in 74 enthalten sind. Die 2 ist daher unter die Groschen geschrieben, die 3 aber zu den Thalern addirt, deren Summe 2355 macht. Folglich ist die Summe aller Posten 2355 rthlr. 2 gr. 4 pf.

Es kann aber diese Summe noch kürzer gefunden werden, wenn man sogleich bey der Addition der Zahlen einer niedrigern Ordnung entweder durch einen Punct oder durch Einbeugung eines Fingers bemerkt, wie oft eine Einheit der höhern Ordnung darin vorkomme. Z. B. Indem man bey der Addition der Pfennige sagt, 6 und 3 ist 9, 9 und 8 ist 17, so sieht man gleich, daß in 17 Pfennigen ein Groschen und 5 Pfennige enthalten sind, daher macht man in der Ordnung der Groschen, der 8 gegen über, bey der 12 einen Punct, oder schlägt einen Finger in der linken Hand ein, die 5 aber wird zu der folgenden 7 addirt, welches wieder einen Groschen macht, daher entweder in der Ordnung der Groschen, der 7 gegen über, bey der 8 wieder ein Punct gemacht, oder noch ein Finger in der linken Hand eingeschlagen wird. Die noch übrige 4 wird hierauf unter den Strich gesetzt, die beyden Puncte in der Ordnung der Groschen aber, oder die beyden eingeschlagenen Finger zeigen an, daß zu den Groschen noch 2 Groschen zu addiren sind, oder beym Gebrauche der Puncte, daß anstatt der 12. in der Ordnung der Groschen 13, und anstatt der 8. wieder eins mehr, nemlich 9 zu sagen sey. Eben so verfährt man bey der Addition der Groschen, denn so oft hier 24 kommt, setzt man einen Punct in der Ordnung der Thaler, oder schlägt einen Finger ein, wodurch wieder gefunden wird, wieviel Thaler in der Summe der Groschen enthalten sind, ohne daß erst eine Division nöthig wäre.

Beyspiele zur Uebung.

24	Cent.	57	℔	12	Loth.	2	Quent.
53	—	24	—	30	—	3	—
46	—	87	—	16	—	1	—
37	—	59	—	4	—	3	—
64	—	13	—	25	—	2	—
226	Cent.	22	℔	25	Loth.	3	Quent.

36	Wspl.	17	Schfl.	12	Metzen.
82	—	20	—	8	—
59	—	13	—	14	—
24	—	22	—	5	—
45	—	8	—	10	—
249	Wspl.	11	Schfl.	1	Metze.

Bey dem ersten von diesen beyden Beyspielen ist zu bemerken, daß 4 Quentchen ein Loth, 32 Loth ein Pfund und 110 Pfund einen Centner ausmachen; bey dem andern, daß 16 Metzen einen Scheffel und 24 Scheffel einen Winspel ausmachen.

Das Subtrahiren.

Es sollen folgende beyde Zahlen von einander subtrahirt werden.

325	rthlr.	4	ggr.	6	pf.
262	—	10	—	8	—
Rest 62	rthlr.	17	ggr.	10	pf.

Der unter den Strich gesetzte Rest ist also gefunden worden. Es sollen zuerst 8 Pfennige von 6 abgezogen werden; da dieses aber nicht möglich ist, so wird von den Groschen einer geborgt, ein Groschen aber beträgt 12 Pfennige, folglich werden die dastehenden 6 Pfennige zu diesen 12 geborgten addirt, und hierauf von der Summe 18 die unten stehenden 8 Pfennige subtrahirt, da denn der Rest 10 beträgt. Eben so muß bey den Thalern geborgt und 24 Groschen zu 3 addirt, von der Summe 27 aber die unten stehende 10 abgezogen werden, da denn 17 bleibt. Endlich wird die unten stehende Anzahl der Thaler von der obern abgezogen.

Es kann durch eine solche Subtraction insonderheit das Alter eines Menschen gefunden werden. Z. B. Es sey jemand gebohren im Jahr 1710, den 20 Junii, Abends um 4 Uhr und gestorben 1764, den 16 November, Morgens um 8 Uhr; so wird sein Alter also berechnet:

1764 Jahr 10 Monat 16 Tage 8 Stunden
1710 — 5 — 20 — 16 —

54 Jahr 4 Monat 26 Tage 16 Stunden

In der obern Reihe ist die Zeit des Todes und darin 10 Monat angesetzt worden, weil der November der elfte Monat im Jahre ist, und folglich seit dem Anfange des Jahrs 10 volle Monate verflossen sind; in der untern Reihe aber ist die Zeit der Geburt und darin aus derselben Ursache 6 Monat, ingleichen 16 Stunden gesetzt worden, weil der Tag von der Mitternacht anfängt, und von da an bis 4 Uhr Abends 16 Stunden verflossen sind. Bey der Subtraction der untern Reihe mußte bey den 16 Tagen ein Tag oder 24 Stunden geborgt, und diese zu den 8 Stunden addirt, von der Summe 32 aber 16 abgezogen werden. Ferner da 20 Tage auch nicht von 15 Tagen abgezogen werden konnten, so mußte ein Monat, welcher hier der zehnte oder der October ist, welcher 31 Tage hat, geborgt werden. Diese 31 Tage zu 15 addirt geben 46 Tage, wovon die 20 Tage unten abgezogen sind, da also 26 Tage, oder weil 7 Tage eine Woche ausmachen, 3 Wochen und 5 Tage übrig bleiben. Folglich ist das gesuchte Alter 54 Jahr 4 Monat 3 Wochen 5 Tage und 16 Stunden.

Anmerk. 1) Wie bey dieser Rechnung die Zahlen der völlig verflossenen Monate gesetzt sind, so müßte auch eigentlich die Zahl der völlig verflossenen Tage gesetzt werden. Z. B. Anstatt der obigen 16 und 20 Tage müßten eigentlich 15 und 19 Tage gesetzt seyn, weil den 16 November erst 15, und den 20 Junii erst 19 volle Tage des Monats verflossen sind. Da indessen bey der Subtraction einerley herauskommen muß, indem beyde Zahlen nur um gleichviel, nemlich um 1 größer angenommen werden, so können die Zahlen der laufenden Tage ohne Fehler hier beybehalten werden. Dies könnte auch bey den Monaten geschehn, würde aber beym Borgen leicht Irrungen verursachen, da nicht alle Monate gleichviele Tage, so wie alle Tage gleichviele Stunden haben.

2) Wenn die Zeit der Geburt noch in das vorige Jahrhundert, oder vor 1701 fällt, und der Mensch in einem protestantischen Lande, in Teutschland oder Holland, oder der Schweitz oder Dännemark gebohren worden, so müssen zu solcher Zeit allemal vorher 10 Tage addirt werden, weil in den protestantischen Ländern damals noch der alte Julianische Calender gebräuchlich war, welcher von den neuen verbesserten Calender, im vorigen Jahrhundert um 10 Tage, so wie in dem jetzigen um 11 Tage, unterschieden ist. Z. B. Es sey, jemand

mand 1682, den 6 October, um 10 Uhr Abends gebohren, und gestorben 1764, den 12 May, um 2 Uhr Morgens, so wird sein Alter also berechnet:

1764 Jahr 4 Monat 12 Tage 2 Stunden
1682 — 9 — 16 — 22 —

81 Jahre 6 Monat 25 Tage 4 Stunden.

Hier mußten anstatt des 6ten Octobers, 9 Monat und 16 Tage gesetzt werden; ferner konnten von den 4 Monaten oben nur 30 Tage geborgt werden, weil der April, welcher geborgt wurde, nur 30 Tage hat, ingleichen mußten von den obern Jahren 12 Monate, die ein Jahr ausmachen, geborgt und zu 3 addirt werden, ehe die 9 Monat unten abgezogen werden konnten.

Beyspiele zur Uebung.

1) Es sey jemand gebohren 1704, den 26 Januar, um 11 Uhr Abends, und gestorben 1764, den 17 März, um 5 Uhr Abends, so wird sein Alter also berechnet:

1764 Jahr 2 Monat 17 Tage 17 Stunden
1704 — 0 — 26 — 23 —

60 Jahr 1 Monat 19 Tage 18 Stunden.

Hier mußten von den Monaten 29 Tage geborgt werden, weil der Februar in dem Jahre 1764, welches ein Schaltjahr ist, 29 Tage hat, davon im fünften Capitel in der Chronologie gehandelt werden wird.

2) Es sey jemand gebohren 1694, den 13 August, Abends um 9 Uhr, und gestorben 1758, den 25 December, Abends um 6 Uhr, so wird sein Alter also berechnet:

1758 Jahr 11 Monat 25 Tage 18 Stunden
1694 — 7 — 23 — 21 —

64 Jahr 4 Monat 1 Tag 21 Stunden.

Hier mußten, weil die Zeit der Geburt in das vorige Jahrhundert fällt, zu dem 13 August zuvörderst 10 Tage addirt werden.

3) Es sey jemand gebohren 1724, den 26 September, Morgens um 1 Uhr, und zwar in England, wo der neue Calender erst seit 1752 angenommen worden, und gestorben 1762, den 2 Februar, Mittags um 12 Uhr, so wird sein Alter also berechnet:

1762 Jahr 1 Monat 2 Tage 12 Stunden
1724 — 9 — 7 — 1 —

37 Jahr 3 Monat 26 Tage 11 Stunden.

Hier mußten zu dem 26 Sept. vorher 11 Tage addirt werden. Die Summe ist 37; da nun der Sept. nur 30 Tage hat, so fiel der Geburtstag auf den 7 October, folglich mußten in die untere Reihe 9 Monat und 7 Täge gesetzt werden.

Das Multipliciren.

Es sollen 48 Rthlr. 17 Gr. 8 Pf. mit 32 multiplicirt werden. Dieses kann auf zweyerley Weise geschehn.

1) Es werden zuerst die 8 Pfennige mit 32 multiplicirt, da denn das Product 256, oder wenn diese Zahl mit 12 dividirt wird, 21 Gr. 4 Pf. ist. Hierauf werden die 17 Gr. mit 32 multiplicirt, da denn das Product 544, oder wenn diese Zahl mit 24 dividirt wird, 22 Rthlr. 16 Gr. ist, wozu die vorhin gefundenen 21 Groschen addirt werden, welches 23 Rthlr. 13 Gr. giebt. Endlich werden auch die 48 Thaler mit 32 multiplicirt, da denn das Product 1536 ist, wozu die vorhin gefundenen 23 Thaler addirt werden, welches 1559 Thaler giebt. Folglich ist das ganze gesuchte Product 1559 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf.

Anmerk. Diese Rechnung kann, wenn der Multiplicator sich in kleine Factoren theilen läßt, welches man das Zerfällen desselben nennt, wie auch in einigen andern Fällen verkürzt werden, wie aus folgenden Beyspielen erhellet: Es sollen 48 Rthlr. 17 Gr. 8 Pf. mit 32, 31 und 33 multiplicirt werden. Weil die Zahl 32 aus den beyden Factoren 8 und 4 besteht, so wird die gegebene Zahl zuvörderst mit 8 multiplicirt, wodurch das achtfache derselben gefunden wird. Wenn nun dieses achtfache wieder mit 4 multiplicirt wird; so kömmt das viermal acht- oder 32fache der gegebenen Zahl. Auch kann anstatt der 8 mit den Factoren derselben 4 und 2 multiplicirt werden. Die Rechnung selbst ist hiernach folgende:

48 Rthlr. 17 Gr. 8 Pf.

			(4
194	— 22	— 8	—
			(4
779	— 28	— 8	—
			(2
1559	— 13	— 4	—

Um ferner die gegebene Zahl mit 31 und dennächst mit 33 zu multipliciren, darf man in beyden Fällen dieselbe nur zuvörderst mit 32, wie vorhin, multipliciren, und darnach die gegebene Zahl im ersten Fall von dem Product subtrahiren, wodurch man das 31fache, und im andern Fall zu dem Product addiren, wodurch man das 33fache der Zahl erhält. Mehrere andere Vortheile in dergleichen Rechnungen können Anfänger in der Folge leicht nach und nach kennen lernen, zuvörderst ist es aber nöthig, die allgemeinen für jeden Fall geltende Regeln hinlänglich zu üben.

2) Oder

2) Oder es werden die 48 Thaler durch 24 multiplicirt, und zu dem Product die 17 Groschen addirt, welche man aber auch gleich zu dem ersten Product aus der 4 in 48 addiren kann, indem man sagt: 4 mal 8 ist 32, und 17 dazu ist 49, 4 mal 4 ist 16, und 4 dazu ist 20 u. s. w. Ferner werden die hiedurch gefundenen 1169 Groschen mit 12 multiplicirt, und die 8 Pfennige sogleich dazu addirt. Das Product 14036 giebt die Anzahl Pfennige, welche in 48 Rthlr. 17 Gr. 8 Pf. enthalten sind. Dieses Product wird nun mit 32 multiplicirt, das Product 449152 wird mit 12 und der Quotient mit 24 dividirt, um diese Anzahl Pfennige wieder in Thaler und Groschen zu verwandeln, da denn die vorhin gefundene Zahl 1559 Rthlr. 13 Gr. 4 Pf. herauskommt. Die Rechnung selbst nach dieser zweyten Methode, deren man sich gemeiniglich bedient, und die in jedem Fall angewendet werden kann, ist folgende:

48 Rthlr. 17 Ggr. 8 Pf.
24

209
96

1169 Gr.
12

2346
1169

14036 Pf.
32

28072
42108

12)
449152 Pf. | 37429 Ggr. | 1559 Rthlr.
36 | 24 | 12

89 | 134 | 79
84 | 120 | 72

51 | 142 | 79
48 | 120 | 72

35 | 229 | 79
24 | 216 | 72

112 | 13 Ggr. | 79
108 | | 72

4 Pf.

Beyspiele zur Uebung.

Es sollen 462 Centr. 36 ℔ 12 Loth 3 Quentl. mit 247 multiplicirt werden. Das Product ist 114195 Centr. 80 ℔ 13 Loth 1 Quentchen.

Es sollen 124 Wspl. 5 Schfl. 7 Metzen mit 52 multiplicirt werden. Das Product ist 6459 Wspl. 18 Schfl. 12 Metzen.

Das Dividiren.

Es sollen 64 Rthlr. 15 Sgr. 4 Pf. durch 26 dividirt werden. Dieses kann wieder auf zweyerley Weise geschehn.

1) Es werden zuerst die 64 Thaler durch 26 dividirt, da denn der Quotient 2 Rthlr. ist. Die bey dieser Division übrig gebliebenen 12 Rthlr. aber werden durch 24 multiplicirt, um sie in Groschen zu verwandeln, wozu die gegebenen 15 Gr. addirt werden. Die hiedurch gefundene Zahl 303 wird wieder mit 26 dividirt, da denn der Quotient 11 Sgr. ist. Die bey dieser Division übrig gebliebenen 17 Sgr. werden durch 12 multiplicirt, um sie in Pfennige zu verwandeln, wozu die gegebenen 4 Pfennige addirt werden. Endlich wird die gefundene Zahl 208 auch durch 26 dividirt, da denn der Quotient 8 Pf. ist. Folglich ist der ganze gesuchte Quotient 2 Rthlr. 11 Sgr. 8 Pf. Oder

2) Es werden die 64 Rthlr. 15 Sgr. 4 Pf., wie oben bey der Multiplication gezeigt worden, in Pfennige verwandelt. Die also gefundene Zahl 18616 wird durch 26, der Quotient mit 12, und der hierdurch entstandene Quotient mit 24 dividirt, um die gefundene Pfennige wieder in Thaler und Groschen zu verwandeln, da denn die vorhin gefundene Zahl 2 Rthlr. 11 Gr. 8 Pf. herauskommt. Die Rechnung selbst nach dieser zweyten Methode ist folgende:

64 Rthlr.

64 Rthlr. 15 Ggr. 4 Pf.
74

271
128

1551 Ggr.
12

3106 12 24
1551

26) 18616 Pf. | 716 Pf. | 59 Ggr. | 2 Rthlr.
182 | 60 | 48

41 116 (11 Ggr.
26 108

156 (8 Pf.
156

0

Anmerk. Wenn der Divisor eine Zahl ist, welche leicht auf kleinere Factoren zurfällt werden kann, so kann die Rechnung der Division nach der obigen ersten Art, auf eine ähnliche Weise, wie im vorhergehenden bey der Multiplication gezeigt ist, vortheilhaft verkürzt werden.

Beyspiele zur Uebung.

Es sollen 6312 Cent. 42 ℔ 18 Loth 2 Quent. durch 68 dividirt werden. Der Quotient ist 92 Cent. 91 Pfund 6 Loth $3\frac{3}{6}\frac{0}{8}$ Quent.

Es sollen 6156 Wspl. 3 Schfl. 8 Metzen durch 482 dividirt werden. Der Quotient ist 12 Wspl. 18 Schfl. $8\frac{2}{4}\frac{3}{8}\frac{2}{2}$ Metzen.

Anmerk. 1) Es können auch zur Uebung die oben bey der Multiplication gefundenen Producte wieder durch den einen Factor, daraus sie entstanden sind, dividirt werden, da denn der andere Factor herauskommen muß, welches zugleich die Probe der Richtigkeit der Rechnung ist. Auf eine ähnliche Art dient auch hier umgekehrt der Division die Multiplication zur Probe.

2) Die benannten Zahlen können nicht anders als durch unbenannte multiplicirt werden, und wenn es in verschiedenen Rechnungen, dergleichen unten vorkommen werden, scheint, als wenn benannte Zahlen durch benannte multiplicirt würden: so sind diese doch in solchem Fall nur wie unbenannte Zahlen anzusehn; denn man kann z. B. 4 rthlr. wol dreymal nehmen oder sie durch 3 multipliciren, aber

4 rthlr. 3 thalermal nehmen heißt nichts. Bey der Division gilt eben dies, es sey denn, daß der Divisor einerley Einheiten mit dem Dividendus hätte, in welchem Fall auch benannte Zahlen in benannte dividirt werden können. Z. B. es können 4 rthlr. durch 2 rthlr. dividirt, d. i. es kann gefunden werden, wie oft 2 rthl. in 4 rthl. enthalten sind.

3) Da man es bey den Rechnungen mit benannten Zahlen nothwendig wissen muß, wieviel eine jede Einheit einer benannten Zahl kleinere enthalte; so hat man zu diesem Gebrauch die Eintheilungen der im gemeinen Leben am häufigsten vorkommenden benannten Größen, so wie sie in unserm Lande am gebräuchlichsten sind, nebst den gewöhnlichen Zeichen derselben in folgendem Verzeichniß beyzufügen wollen.

1. Die Münzen.

Ein Louis d'or oder Pistolette gilt	5 Thaler
oder	9 Rheinische Gulden oder Floren
Ein Ducat (Duc.)	2 Thaler 18 gute Groschen
Ein Reichsthaler (Rthlr.)	24 gute Groschen
oder	36 Mariengroschen
oder	30 Kaysergroschen
oder	5 Tümpfe
oder	90 preußische Groschen
Ein Meißnischer Gulden, (Mfl.)	21 gute Groschen
Ein Kaysergulden, (Kfl.)	16 gute Groschen
oder	20 Kaysergroschen
Ein preuß. Gulden	8 gute Groschen od. 30 preuß. Groschen
Eine Mark (Mck.)	8 gute Groschen,
oder	16 Schillinge
Ein Orthsthaler	6 gute Groschen
Ein Tümpf	4 gute Groschen 9$\frac{3}{4}$ Pfennige
oder	18 preußische Groschen
Ein Batzen	16 Pfennige
oder	4 gute Kreutzer
Ein guter Groschen (ggr. oder gr.)	12 Pfennige
oder	2 Schillinge
oder	3 gute Kreutzer
oder	5 Schlesische Gröschel
Ein Kaisergroschen (Kgl.)	3 Kayserkreutzer
oder	4 Schlesische Gröschel

Ein

Ein Mariengroschen (Mgr.)	8 Pfennige
Ein Albus	7 Pfennige
Ein Schilling, (ßl.)	6 Pfennige
oder	12 Pfennige
Ein guter Kreutzer (Xer)	4 Pfennige
Ein Kayserkreutzer, KXer	$3\frac{1}{3}$ Pfennige
Ein preußischer oder polnischer Groschen	3 Schillinge
oder	$3\frac{1}{3}$ Pfennige
Ein Schlesischer Gröschel	$2\frac{2}{3}$ Pfennige
Ein Pfennig (₰)	2 Heller

Anmerk. Die vornehmsten ausländischen Münzsorten und deren Werthe nach unserm Gelde sind 1) in Portugal und Spanien ein Piaster, welcher 1 thlr. 16 ggr. gilt, ein Real in Portugal 1 ggr. 5 pf., in Spanien 3 ggr. 2) in Frankreich ein Livre, welches 20 Sols enthält, 6 ggr. 4 pf. Ein französischer kleiner Thaler enthält 3, ein großer 6, ein Louis neuf oder Schildlouisd'or 24 Livres. 3) in England ein Pfund Sterling, welches 20 englische Schillinge enthält, 6 rthlr. ein Schilling, welcher 12 Pence enthält, 7 ggr. Eine Guinee enthält 21 englische Schillinge. 4) in Holland ein Thaler 30 ggr., ein Gulden 12 ggr., ein Schilling 2 ggr. 8 pf., ein Stüver 7 pf. 5) in Dännemark eine Krone 18 ggr. 8 pf., eine Mark 4 ggr. 8 pf. 6) in Schweden ein Thaler 16 ggr., eine Caroline 8 ggr., eine Mark 4 ggr. 7) in Polen und Preußen ein Gulden 18 ggr., in Großpohlen aber 4 ggr., ein Dütchen $9\frac{1}{2}$ pf., ein Groschen 3 pf. 8) in Rußland ein Rubel 1 rthlr. 8 ggr., eine Grive 3 ggr. 2 pf., eine Kapecke 4 pf. 9) in Ungarn ein Gulden 14 ggr. 10) in der Türkey, ein Beutel macht 500 rthlr. aus, ein Ducaten 2 rthlr. 12 gr., ein Aslan 24 ggr. ein Asper 3 pf. 11) in Italien ein Scudo 1 rthlr. 6 ggr., eine Zechine in Venedig 2 rthlr. 12 ggr., in Neapel 4 rthlr. 8 ggr., ein Lire 16 ggr. ein Grosse 1 ggr. 2 pf. ein Soldo 2 pf.

II. Die Gewichte.

a) Kramergewichte.

Ein Centner (Ctl.) wieget	110 Pfund
oder	5 schwere Steine
Ein schwerer Stein (Schw. St.)	22 Pfund
Ein leichter Stein (L. St.)	11 Pfund
Ein Pfund (℔)	32 Loth
Ein Loth (Lt.)	4 Quentchen

Ein

Ein Quentchen (Ql.)	4 Pfenniggewicht
Ein Pfenniggewicht (Pfgw.)	2 Hellergewicht
oder	15 Gran.

b) Schiffsgewichte.

Eine Last	12 Schiffspfund
Ein Schiffspfund (Sch. ℔)	180 Pfund
Ein Lißpfund (L. ℔)	16 Pfund

c) Gold- und Silbergewichte.

Eine Mark (Mk.)	8 Unzen
oder	16 Loth
oder	24 Karath
Eine Unze	2 Loth
oder	3 Karath
oder	12 Gran
Ein Loth (Lt.)	6 Gran
Ein Karath (Kar.)	4 Gran
Ein Gran (Gr.)	3 Grän

d) Apotheckergewichte.

Ein Pfund (℔)	12 Unzen
oder	24 Loth
Eine Unze (℥)	8 Drachmen
Ein Drachma (ʒ)	3 Scrupel
Ein Scrupel (℈)	20 Gran

III. Die Maasse.

a) Getreydemaaß.

Eine Last enthält	4 Winspel
oder bey Gersten und Haber	2 Winspel
Ein Winspel (Wsp.)	2 Malter
oder	24 Scheffel
Ein Malter oder Drömbt	12 Scheffel
Ein Scheffel (Schfl.)	4 Viertel
oder	16 Metzen
Ein Viertel oder Viert (Vtl.)	4 Metzen
Eine Metze	4 Mäßgen.

b) Wein-

b) Weinmaaß.

Eine Last enthält	2 Faß
Ein Faß oder Fuder	4 Oxhoft
Ein Oxhoft	$1\frac{1}{2}$ Ohm
Ein Ohm	2 Eymer
oder	4 Anker
oder	40 Stübchen
oder	160 oder in Berlin 128 Quart
Ein Anker	40 Pott
Ein Stübchen	4 Quart
Ein Quart	2 Nößel

c) Biermaaß.

Ein Gebräude	9 Kupen
Eine Kupe	2 Faß
Ein Faß	2 Tonnen
oder	200 Quart
Eine Tonne	4 Oehmchen
oder	100 Quart
Ein Oehmchen	24 oder 25 Kannen
Eine Kanne oder Quart oder Maaß	2 Nößel

Anmerk. Das Längen-, Flächen und Cubikmaaß wird unten in der Geometrie, daß Zeitmaaß aber in der Chronologie angezeigt werden.

IV. Die Benennungen gezählter Stücke.

Ein Schock hat	60 Stück
Eine Steige	20 Stück
Eine Mandel	15 Stück
Ein Dutzend	12 Stück
Ein Ballen Papier	10 Rieß
Ein Rieß	20 Bücher
Ein Buch Druckpapier	25 Bogen
Ein Buch Schreibpapier	24 Bogen

Die

Die Brüche.

17. * Wie entsteht ein Bruch?

Ein Bruch entsteht, wenn eine ganze Einheit in gleiche Theile getheilt, und eine gewisse Anzahl oder Menge solcher Theile bestimmt wird.

Z. B. Zweydrittel Thaler ist ein Bruch, und zeigt den dritten Theil eines Thalers zweymal genommen an. Eben so bedeutet Vier Fünftel Centner, daß der Centner in 5 gleiche Theile getheilt, und einer dieser gleichen Theile viermal genommen werden soll.

Anmerk. 1) Es werden also zu einem Bruch allemal zwey Zahlen erfordert, davon die eine anzeigt, in wie viele gleiche Theile die ganze Einheit eingetheilt worden, die andere aber eine gewisse Menge solcher Theile bestimmt. Die erste heißt der Nenner, die andere der Zähler, beyde aber heißen Glieder des Bruchs. Der Zähler wird im Schreiben oben, und der Nenner unten gesetzt, zwischen beide aber ein Querstrich gemacht; z. B. $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{10}$. Diese Brüche werden also ausgesprochen: Ein halb, zwey drittel, drey viertel, vier fünftel, drey zehntel. Daß jedoch bey Decimalbrüchen in der Art, die Brüche zu bezeichnen, eine Ausnahme gemacht werde, ist schon aus dem vorhergehenden bekannt. Folgende Ausdrücke sind demnach gleichgültig 0,3 oder $\frac{3}{10}$; 0,02 oder $\frac{2}{100}$; 1,025 oder $1\frac{25}{1000}$; 6,00004 oder $6\frac{4}{100000}$; 1,2346879 oder $1\frac{2346879}{10000000}$; woraus zugleich erhellet, daß die Nenner der Decimalbrüche, welche bey der bequemeren Bezeichnungsart derselben durch Hülfe des Comma, weggelassen werden, entweder 10, (wie bey $\frac{3}{10}$,) oder Producte aus zwey oder drey u. s. w. Factoren sind, deren jeder 10 ist; ferner daß der weggelassene Nenner jedesmal eine 1 mit so viel Nullen zur Rechten derselben sey, als Decimalstellen vorhanden sind. Z. B. 1,025 hat drey Decimalstellen, daher ist der Nenner des mit diesem gleichviel geltenden Ausdrucks $1\frac{25}{1000}$ tausend, d. i. eine 1 mit drey Nullen zur Rechten derselben.

2) Dergleichen Brüche entstehen bey Rechnungen unter andern durch die Zahlen, welche bey einer Division ganzer Zahlen am Ende übrig bleiben, und von welchen schon im vorhergehenden bey der Division angezeigt ist, daß sie allemal mit dem Divisor in einen Bruch gesetzt und also den gefundenen Ziffern des Quotienten angehängt werden müssen. Der Zähler dieses Bruchs ist der Rest, und der Nenner desselben ist der Divisor. Z. B. Wenn 384 mit 5 dividirt wird, so ist der

der Quotient 76, es bleibt aber 4 übrig, diese mit der 5 in einen Bruch gesetzt, giebet $\frac{4}{5}$; folglich ist der Quotient $76\frac{4}{5}$.

3) Die Bezeichnungsart der Brüche ist einerley mit der Bezeichnungsart der Division. Dieses gründet sich darauf, daß jeder Bruch als ein Quotient, dessen Dividendus der Zähler, und dessen Divisor der Nenner ist, angesehen werden kann. Z. B. Der Bruch $\frac{25}{8}$ (25 achtel) zeigt an, daß die Einheit in 8 gleiche Theile getheilt, und ein auf diese Art entstandenes Achtel der Einheit 25mal genommen werden soll. Dieser Bruch ist völlig einerley mit dem Quotienten, welcher entsteht, wenn 25 durch 8 dividirt wird, indem nach dem vorhergehenden 25 durch 8 dividirt auch soviel heißt, als den achten Theil von 25 finden. Wie nun $\frac{1}{8}$ der achte Theil von 1 ist, so sind auch $\frac{2}{8}$ der achte Theil von 2; $\frac{3}{8}$ der achte Theil von 3; u. s. w. folglich $\frac{25}{8}$ der achte Theil von 25. Es ist auch dieser Ausdruck völlig einerley mit dem Quotienten $3\frac{1}{8}$, der gefunden wird, wenn man nach den Regeln der Division 25 durch 8 dividirt. Wenn z. B. 25 rthlr. unter 8 Personen gleich vertheilt, folglich in 8 gleiche Theile getheilt werden sollen, so kann dies unter andern auf eine doppelte Art geschehen. Zuvörderst dadurch, daß nach der Reihe jeder einen Thaler so oft, als möglich ist, erhält; diese Vertheilung eines Thalers wird dreymal geschehen können, und es werden sodann 24 rthlr. vertheilt seyn, wovon jede Person 3 rthlr. erhalten hat. Hierauf wird der noch übrige 25ste Thaler in acht gleiche Theile zu theilen seyn, und jeder wird noch ein Achtel dieses Thalers, welches 3 Gr. sind, erhalten. Folglich ist $3\frac{1}{8}$ rthlr. der Quotient. Oder es kann eben diese Theilung auch dadurch geschehn, daß sogleich ein jeder der 25 rthlr. in acht gleiche Theile getheilt wird, und jede Person von jedem Thaler ein Achtel erhält, da denn jeder ohne Zweifel so viel Achtel, als ganze Thaler vorhanden sind, d. i. 25 Achtel erhalten wird. Folglich ist der Quotient auch $\frac{25}{8}$, und dieser ist mit $3\frac{1}{8}$ völlig gleichgeltend. Die letzte Art der Bezeichnung des Quotienten ist die einzige mögliche, im Fall der Dividendus kleiner als der Divisor ist. Beyde Arten sind aber möglich, im Fall der Dividendus größer ist. Es kann daher auch umgekehrt jeder Quotient als ein Bruch ausgedruckt und angesehn werden, dessen Zähler der Dividendus, und dessen Nenner der Divisor ist.

81. Wie können die Brüche eingetheilt werden?

1) In ächte oder eigentliche, und unächte oder uneigentliche Brüche. Die erstern haben einen Zähler, der kleiner ist als ihr Nenner; die andern

dern haben einen Zähler, der größer ist als ihr Nenner, und enthalten also eine oder mehrere ganze Einheiten.

Z. B. $\frac{3}{2}$ ist ein ächter, $\frac{2}{4}$ aber ein unächter Bruch, der 2 ganze Einheiten enthält.

2) In **reine** und **gemischte** Brüche. Die erstern haben keine ganze Zahlen vor sich, die andern bestehn aus einer ganzen Zahl und einem Bruch.

Z. B. $\frac{1}{2}$ ist ein reiner $4\frac{1}{2}$ aber ein gemischter Bruch.

3) In **einfache**, und **doppelte** oder **gebrochene**, Brüche. In den erstern sind der Zähler und Nenner ganze, in den andern aber einer oder beyde gebrochene Zahlen.

Z. B. $\frac{1}{2}$ ist ein einfacher Bruch, $\frac{\frac{1}{4}}{2}$ (ein halb Viertel) aber, ingleichen $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ wo $\frac{1}{2}$ der Zähler und $\frac{3}{4}$ der Nenner ist, ein doppelter; denn in dem vorletzten ist der Zähler, in dem letzten aber der Zähler sowohl als Nenner ein Bruch. Dergleichen gebrochne Brüche sind auch $\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}}$; $\frac{21}{52\frac{1}{7}}$ u. dergl.

Anmerk. Die Bedeutung dergleichen gebrochener Brüche erhellet aus der Erklärung des Bruchs. Nach derselben zeigt der Nenner die Anzahl der gleichen Theile an, welche zusammen die ganze Einheit ausmachen, der Zähler aber zeigt an, wieviel solcher gleichen Theile in der Größe enthalten sind, welche der Bruch ausdrückt. Z. B. Der Nenner des Bruchs $\frac{21}{52\frac{1}{7}}$ zeigt an, daß die Einheit aus $52\frac{1}{7}$ gleichen Theilen, d. i. aus 52 Ganzen und außer dem noch aus dem siebenten Theil eines dieser ganzen Theile bestehe. Der Zähler dieses Bruchs aber zeigt an, daß die Größe, welche der Bruch ausdrückt, aus 21 solchen ganzen Theilen bestehe. Wäre z. B. die Einheit ein Jahr, so würde der Bruch 21 Wochen bedeuten. Denn da das gemeine bürgerliche Jahr aus 365, und jede Woche aus 7 Tagen besteht; so enthält das Jahr 52 Wochen und 1 Tag, oder $52\frac{1}{7}$ Wochen. Folglich ist einer der gleichen Theile, deren $52\frac{1}{7}$ ein ganzes Jahr ausmachen, 1 Woche und 21 dieser Theile

Theile sind 21 Wochen. Wäre bey dem Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}}$ die Einheit ein Ducaten oder 2 rthlr. 18 gr.; d. i. $2\frac{3}{4}$ rthl; so würde dieser Bruch $\frac{1}{2}$ Thaler oder 12 gr. bedeuten, weil 1 rthl. ein solcher Theil ist, deren $2\frac{3}{4}$ den ganzen Ducaten ausmachen, wie der Nenner fordert. Der Zähler aber zeigt an, daß von einem solchen Theil die Hälfte genommen werden soll. Der Bruch $\frac{\frac{1}{4}}{2}$ zeigt an, daß die Einheit in 2 gleiche Theile getheilt, und von einem solchen Theil $\frac{1}{4}$ genommen werden soll. Er bedeutet also $\frac{1}{4}$ der Hälfte der Einheit, welches indessen mit der Hälfte des Viertels der Einheit einerley ist, daher dieser Bruch durch ein halb Viertel ausgedruckt werden kann. Ist die Einheit 1 rthlr., so bedeutet der Bruch 3 Groschen. Was der Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ bedeutet, erhellt aus folgendem. Der Nenner $\frac{3}{4}$ zeigt an, daß die Einheit aus Theilen bestehe, die zusammen noch kein Ganzes, sondern nur $\frac{3}{4}$ eines Ganzen ausmachen. Der Zähler aber zeigt an, daß von einem solchen ganzen Theil, wovon der Nenner nur $\frac{3}{4}$ enthält, die Hälfte genommen werden solle. Wäre hier 1 rthlr. die Einheit; so würde der Bruch 16 Groschen bedeuten. Der Nenner nemlich zeigt an, daß drey Viertel desjenigen Theils, wovon nach dem Zähler die Hälfte genommen werden soll, den ganzen Thaler ausmachen, d. i. daß der Thaler nur 3 solcher Theile enthalten soll, deren das Ganze 4 enthält. Folglich sind 4 Mark d. i. 4 Achtgroschenstücke, oder 2 Gulden das Ganze, weil 1 Thaler drey Achtgroschenstücke, folglich $\frac{3}{4}$ von 2 Gulden enthält; die Hälfte aber dieses Ganzen, welche der Zähler anzeigt, ist 1 Gulden, oder 16 Groschen. Wenn man diese Brüche als Quotienten ansieht, und den Zähler durch den Nenner nach den Regeln, welche unten gegeben werden, dividirt; so kommen die hier herausgebrachte Zahlen heraus, daher diese Erläuterung der Bedeutung gebrochener Brüche eine nützliche Anwendung und Bestätigung der obigen Vergleichung des Begrifs der Brüche mit dem Begrif der Quotienten ist.

19. Wie werden die Brüche in andere Brüche, welche denselben Werth haben, verwandelt?

1) Ueberhaupt wird ein Bruch in einen andern Bruch, welcher denselben Werth hat, verwandelt, wenn man den Zähler und Nenner desselben durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt.

z. B. Wenn der Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 2 multiplicirt wird, so entsteht daraus $\frac{6}{8}$, welcher eben so viel gilt als $\frac{3}{4}$, ob derselbe gleich mit andern Zahlen ausgedruckt ist.

2) Insonderheit geschieht dieses

(1) Durch die **Abbreviation** oder das **Aufheben** der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdruckt.

(2) Durch die **Resolution** der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths in einen andern verwandelt, dessen Nenner gegeben ist.

Anmerk. Gemeiniglich wird hiedurch diejenige Verwandelung eines benannten Bruchs verstanden, durch welche derselbe einen Nenner bekommt, der eine im gemeinen Leben gewöhnliche Eintheilung der ganzen Einheit, davon der Bruch genommen ist, anzeigt, oder dieselbe in solche Theile eintheilt, welche eine besondere Benennung haben; z. B. wenn man einen Bruch von einem Thaler in einen andern verwandeln soll, dessen Nenner 24 ist, folglich finden soll, wieviel derselbe Bruch Groschen enthalte.

(3) Wenn man mehrere Brüche **unter gleiche Benennung bringt**, oder sie so verwandelt, daß sie alle ohne Veränderung ihres Werths gleiche Nenner bekommen, und

(4) Durch das **Einrichten** gemischter Brüche, wenn man dieselben in unächte reine Brüche verwandelt.

Anmerk. 1) Wenn der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, der Zähler aber unverändert bleibt, so wird der Bruch sovielmal kleiner, als die Zahl Einheiten enthält; wird aber der Nenner durch eine ganze Zahl, bey unverändertem Zähler, dividirt, so wird der Bruch sovielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält. z. B. $\frac{5}{12}$ ist nur halb so viel als $\frac{5}{6}$, weil der Nenner des letzten Bruchs mit 2 multiplicirt oder der Nenner des ersten Bruchs mit 2 dividirt worden. Der zwölfte Theil der Einheit kann nemlich nur halb so groß als der sechste

Theil

Theil derſelben ſeyn, folglich müſſen auch 5 Zwölftel nur halb ſo groß, als 5 Sechstel derſelben Einheit ſeyn. Wenn dagegen der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, der Nenner aber unverändert bleibt, ſo wird der Bruch ſo vielmal größer, als dieſe Zahl Einheiten enthält; wird aber der Zähler mit einer ganzen Zahl bey unveränderrem Nenner dividirt, ſo wird der Bruch ſovielmal kleiner als dieſe Zahl Einheiten enthält. Z. B. $\frac{4}{7}$ iſt noch einmal ſoviel als $\frac{2}{7}$, weil der Zähler dieſes letztern Bruchs mit 2 multiplicirt, oder der Zähler des erſten Bruchs mit 2 dividirt worden.

2) Wenn daher Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ſo bleibt der Werth des Bruchs unverändert. Wenn nemlich z. B. von dem Bruch $\frac{2}{3}$ der Zähler mit 4 multiplicirt, der Nenner aber beybehalten wird, ſo kommt $\frac{8}{3}$, welcher Bruch viermal größer als $\frac{2}{3}$ iſt; wird nun ferner von dieſem Bruch $\frac{8}{3}$ der Nenner gleichfalls mit 4 multiplicirt, und der Zähler beybehalten; ſo kommt $\frac{8}{12}$, welcher Bruch wieder viermal kleiner als $\frac{8}{3}$, d. i. ſo groß als der Bruch $\frac{2}{3}$ ſeyn muß. Wenn die Einheit ein Thaler iſt; ſo ſind $\frac{2}{3}$ rthlr. 16 Groſchen, und da $\frac{8}{12}$ rthlr. 2 Groſchen iſt, ſo ſind $\frac{8}{12}$ rthlr. ebenfalls 16 Groſchen. Wird umgekehrt von dem Bruch $\frac{8}{12}$ der Zähler mit 4 dividirt und der Nenner beybehalten, ſo kommt $\frac{2}{12}$, welcher Bruch viermal kleiner als $\frac{8}{12}$ iſt; wird nun ferner von dieſem Bruch $\frac{2}{12}$ der Nenner mit 4 dividirt und der Zähler beybehalten, ſo kommt $\frac{2}{3}$, welcher Bruch wieder viermal größer als $\frac{2}{12}$, folglich ſo groß als $\frac{8}{12}$ ſeyn muß. Demnach kann einerley Bruch auf viele verſchiedene Arten ausgedruckt werden, ohne daß ſein Werth dadurch verändert wird. Z. B. Folgende Reihen Brüche, wo die Zähler und Nenner des erſten Bruchs jeder Reihe nach einander mit einerley Zahl in der erſten Reihe multiplicirt, in der andern aber dividirt ſind, bedeuten einerley:

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{7}{14}$ $\frac{8}{16}$ u. ſ. w.

ferner $\frac{36}{48}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{12}{16}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$

3) Wenn zwey oder mehr Brüche gleiche Nenner haben; ſo iſt derjenige der größere, der den größeren Zähler hat; wenn aber zwey oder mehr Brüche gleiche Zähler haben; ſo iſt derjenige der größere, der den kleineren Nenner hat. Z. B. $\frac{3}{5}$ iſt größer als $\frac{2}{5}$, wie auch größer als $\frac{3}{7}$.

20. Wie wird ein Bruch abbreviirt oder aufgehoben?

Es wird sowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs durch dieselbe Zahl dividirt.

Z. B. Es soll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden, so werden Zähler und Nenner durch 12 dividirt, wodurch man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhält, welcher nach dem Vorhergehenden eben so viel gilt als $\frac{36}{48}$.

Anmerk. 1) Die Zahl, durch welche ein Bruch aufgehoben werden kann, muß allemal eine ungerade Zahl seyn, wenn der Zähler und Nenner oder einer von beyden ungerade Zahlen sind; z. B. $\frac{15}{21}$ kann nur durch 3 aufgehoben werden, $\frac{27}{36}$ durch 9, $\frac{55}{132}$ durch 11, $\frac{9}{15}$ durch 3. Sind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können sie sowol durch gerade als ungerade Zahlen, wenigstens allemal durch 2 aufgehoben werden; z. B. $\frac{32}{40}$ kann durch 8 aufgehoben werde, $\frac{12}{18}$ durch 3 und 6. Endigen sie sich in 5 oder 0 und 5, so können sie allemal durch 5 aufgehoben werden; z. B. $\frac{25}{60}$ kann durch 5 aufgehoben werden. Endigen sie sich beyde in 0 oder mehreren Nullen, so kann in beyden eine gleiche Anzahl von Nullen weggestrichen, d. i. der Bruch durch 10, 100, 1000 ꝛc aufgehoben werden; z. B. $\frac{7000}{11000}$ kann durch 100 aufgehoben oder die 2 Nullen des Zählers können gegen 2 Nullen des Nenners weggestrichen werden. Wenn man die Ziffern des Zählers und Nenners, jede besonders, als bloße Einer summirt, und diese Summen durch 3 oder 9 ohne Rest dividirt werden können, so läßt sich der Bruch selbst auch durch diese Zahlen heben. Z. B. Wenn man in dem Bruch $\frac{378}{5973}$ die Ziffern des Zählers 3, 7 und 8 summirt, so kommt 18, und aus den Ziffern des Nenners 8, 9, 7 und 3 kommt 27. Beyde Summen können durch 9 ohne Rest dividirt, und also der Bruch $\frac{873}{5973}$ durch 9 aufgehoben werden. Der Bruch $\frac{411}{2601}$ kann durch 3 gehoben werden, welches man auf eben diese Art findet. Sind die Zähler und Nenner der Brüche, die durch 9 oder 3 gehoben werden können, zugleich gerade Zahlen; so können sie wenigstens durch 18 oder 6 gehoben werden.

2) Wenn zwey oder mehr Zahlen durch einerley Zahl ohne Rest dividirt werden können, so wird diese der gemeinschaftliche **Divisor** jener Zahlen genannt, woraus zugleich erhellt, was unter dem größten gemeinschaftlichen Divisor zweyer oder mehrerer Zahlen verstanden werde; z. B. Von den Zahlen 12, 18, 24, sind 2, 3 und 6 die gemeinschaftlichen Divisoren, und 6 ist der größte derselben. Wenn zwey oder

mehr

mehr Zahlen keinen gemeinschaftlichen Divisor, außer 1, haben; so werden sie Primzahlen unter sich genannt. Dergleichen sind z. B. die Zahlen 15 und 16, in dem 16 durch keine der Zahlen, durch welche 15, und 15 wiederum durch keine der Zahlen, durch welche 16 ohne Rest dividirt werden kann, sich ohne Rest dividiren läßt. Eine Zahl, welche überhaupt durch keine ganze Zahl, als durch sich selbst und durch 1, ohne Rest dividirt werden kann, wird schlechthin eine Primzahl genannt. Dergleichen sind z. B. die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, u. s. w. deren keine durch irgend eine andere ganze Zahl ohne Rest dividirt werden kann. Um einen Bruch aufzuheben, muß man demnach die gemeinschaftlichen Divisoren des Zählers und Nenners kennen, und wenn man beyde mit ihrem größten gemeinschaftlichen Divisor dividirt, so wird der Bruch durch die möglichst kleinsten ganzen Zahlen ausgedruckt.

3) Dieser größte gemeinschaftliche Divisor der Glieder eines Bruchs wird gefunden, wenn man mit der kleineren Zahl in die größre, ferner, im Fall ein Rest bleibt, mit diesem wieder in die kleinere Zahl, hierauf, im Fall wieder ein Rest bleibt, mit diesem in den vorigen Rest, u. s. w. dividirt, bis bey einer solcher Divisionen kein Rest übrig bleibt. Der letzte Divisor ist der gesuchte größte Theiler des Bruchs. Ist er 1; so kann der Bruch durch keine kleinere Zahlen ausgedruckt werden, und seine Glieder sind Primzahlen unter sich. Z. B. Den größten Theiler des Bruchs $\frac{144}{720}$ zu finden, wird mit 144 in 720 dividirt; da nun bey dieser Division kein Rest bleibt; so ist 144 selbst die gesuchte Zahl, und der Bruch kann durch 144 aufgehoben werden. Um ferner den größten Theiler des Bruchs $\frac{28}{512}$ zu finden, wird 28 in 512 dividirt; der Rest ist 8; hiemit wird wieder 28 dividirt; der Rest ist 4; mit demselben wird wieder der vorige Rest 8 dividirt; da nun 4 in 8 aufgeht, so ist 4 der größte Theiler des Bruchs. Wenn auf ähnliche Art bey dem Bruch $\frac{101}{711}$ die Rechnung gemacht wird; so kommt 1 zum letzten Divisor, bey welchem die Division aufgeht, woraus folgt, daß dieser Bruch nicht aufgehoben werden könne.

21. Wie wird ein Bruch resolvirt?

1) Es wird entweder der gegebene Nenner durch den Nenner des Bruchs dividirt, und der Quotient mit dem Zähler desselben multiplicirt, oder (weil es einerley ist, in welcher Ordnung Multiplication und Division einer Zahl geschieht), es wird der gegebene Nenner zuerst mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt,

und das Product mit dem Nenner desselben dividirt. In beyden Fällen kommt der Zähler des geforderten Bruchs heraus, der den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruch gleich ist.

Z. B. Es soll $\frac{2}{3}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 24 ist, oder es soll gefunden werden, wie viel $\frac{2}{3}$ rthlr. Groschen machen, deren ein Thaler 24 enthält; so wird entweder 24 mit 3 dividirt, und der Quotient 8 mit 2 multiplicirt; oder es wird 24 mit 2 multiplicirt, und das Product 48 mit 3 dividirt. In beyden Fällen kommt 16, daher $\frac{16}{24}$ rthlr. der gesuchte Bruch ist, welcher eben so viel als $\frac{2}{3}$ rthlr., wie auch eben so viel, als 16 Groschen ist. Eben so wird gefunden, daß $\frac{3}{5}$ rthlr. so viel als $14\frac{2}{5}$ Groschen, $\frac{2}{5}$ Groschen aber $4\frac{4}{5}$ Pfennige; $\frac{4}{5}$ Centner so viel als $62\frac{4}{7}$ Pfund, $\frac{4}{7}$ Pfund so viel als $27\frac{3}{7}$ Loth sind, weil ein Centner 110 Pfund, und ein Pfund 32 Loth enthält.

Anmerk. Den Bruch $\frac{2}{3}$ rthlr. in Groschen verwandeln, heißt nichts anders, als bestimmen, was herauskomme, wenn man den dritten Theil von 24 Groschen zweymal nimmt, woraus die Richtigkeit der ersten Art der Rechnung, die hier gezeigt ist, erhellt; die zweyte Art, da zuerst multiplicirt und sodann dividirt wird, ist öfters bequemer, weil bey der Division oft ein gemischter Bruch zum Quotienten kommt, wie z. B. bey $\frac{3}{5}$ rthlr.

2) Nach eben dieser Regel wird auch ein jeder gegebener Bruch in einen gleichvielgeltenden Decimalbruch verwandelt, indem man nemlich den Zähler des gegebenen Bruchs mit den Nennern der Decimalbrüche, d. i. mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. multiplicirt, (welches dadurch geschieht, daß man dem Zähler eine oder mehrere Nullen anhängt), und sodann mit dem Nenner in den also vermehrten Zähler dividirt. Der Quotient bekommt so viele Decimalstellen, so viel Nullen dem Zähler angehängt worden sind.

Z. B. Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{17}{18}$, in Decimalbrüche verwandelt werden; so ist die Rechnung folgende;

2)

	10		300		5000		170000
2)	———	4)	———	8)	———	16)	———
	0,5		0,75		0,625		1,0625

Aus dieser Rechnung erhellt zugleich, daß man im Anfange der Rechnung nur eine willkührliche Anzahl Nullen dem Zähler anhängen dürfe; indem sich durch die Rechnung selbst nachher ergiebt, ob deren mehr oder weniger nöthig sind.

Anmerk. 1) Es sollen die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{11}$, in Decimalbrüche verwandelt werden, so ist die Rechnung folgende:

	111		3264532		47474		
	10000..		1000000000...		7000000..		
3)	———	7)	———	11)	———		
	0,3333..		0,142857142...		0,636363..		

Bey diesen, so wie bey vielen ähnlichen Rechnungen, gehet die Division niemals auf, sie mag so weit fortgesetzt werden, als man will. Ohnerachtet sich indessen daher nicht völlig genau angeben läßt, wie viel z. B. $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{7}$ oder $\frac{7}{11}$ Centner in Decimalbrüchen betragen; so erhellet doch, daß die Rechnung so weit fortgesetzt werden könne, das alles, was sodenn noch fehlt, eine so kleine Größe bedeute, welche für nichts zu rechnen ist. Z. B. Wenn man sagt $\frac{1}{7}$ Centner beträgt 0,1428571, d. i. 1428571 Zehnmillionentheile des Gewichts des ganzen Centners, so begeht man zwar einen Fehler, indem man die folgenden Hundertmillionentheile u. s. w. weglässt. Aber der hundertmillionenste Theil eines Centners, und noch mehr die folgenden zehnmal, hundertmal u. s. w. kleinere Theile sind so unbeträchtlich kleine Theile desselben, daß sie für nichts geachtet werden können. 1 Gran, welches der 7680ste Theil eines Pfundes ist, beträgt 1 Millionentheil des Centners, folglich ist ein Hundertmillionentheil desselben, der hundertste Theil eines Gran, welcher für nichts zu achten ist. Daher bedient man sich auch solcher Decimalbrüche mit Vortheil anstatt der gemeinen Brüche in der Mathematik, weil man jedesmal im Stande ist, den hier entstehenden Fehler völlig unerheblich zu machen, indem man nach Beschaffenheit und Größe der Einheit, und je nachdem mehr oder weniger Genauigkeit der Rechnung nöthig ist, mehr oder weniger Decimalstellen beybehält.

2) Auf eben diese Art wird bey der Division der zweyte Theil des Quotienten, welcher, wenn er vorhanden ist, einen gemeinen Bruch bedeutet, vermieden, indem man zur Rechten des Dividenden ein Comma setzt, und demselben mehrere Nullen anhängt, und sodann die Division fortsetzt, wie aus folgender Rechnung erhellet, welche je nachdem größere Genauigkeit verlangt wird, noch weiter fortgesetzt werden kann, daher auch auf den übrig beibenden Rest,

welcher hier 136 Zehntausendtel beträgt nicht geachtet wird.

```
134) 847,0000 | 3,6196
     702 ....
     ------
     1450...
     1404...
     ------
      460..
      234..
      ------
      2260.
      2106.
      ------
       1540
       1404
       ----
        136
```

3) In solchen Fällen, da folgende Decimalbrüche in der Rechnung weggelassen, und die erste der weggelassenen Ziffern 5, oder größer als 5 ist, wird gewöhnlich die letzte beybehaltene Ziffer um 1 vermehrt, weil dadurch der durch die Abkürzung des Bruchs begangene Fehler vermindert wird. Z. B. Wenn die Ziffern des Bruchs $0,142857142.. = \frac{1}{7}$ nur bis auf Tausendtel beybehalten werden sollen; so wird $\frac{1}{7} = 0,143$ angenommen. Wird nemlich $\frac{1}{7} = 0,142$ angenommen; so beträgt der Fehler über 8 Zehntausendtel, um welche 0,142 kleiner, als $\frac{1}{7}$ ist. Wird aber zu 0,142 ein Tausendtel, d. i. zehn Zehntausendtel addirt; so beträgt der Fehler weniger als 2 Zehntausendtel, um welche 0,143 größer, als $\frac{1}{7}$ ist, indem nicht 10, sondern nur etwas mehr, als 8 Zehntausendtel dazu kommen sollten. Dieser Fehler aber, da weniger als 0,0002 zu viel genommen wird, ist geringer, als der vorige, da über 0,0008 zu wenig genommen wurden.

22. Wie werden zwey oder mehrere Brüche unter gleiche Benennung gebracht?

1) Wenn nur zwey Brüche gegeben sind, so wird eines jeden Zähler und Nenner mit des andern Nenner multiplicirt.

Z. B. Es sollen die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so wird des ersten Bruchs Zähler und Nenner mit 4, des andern Bruchs Zähler und Nenner aber mit 3 multiplicirt. Dadurch erhält man die Brüche

Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, welche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten als $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$.

Anmerk. Im Fall die Nenner der beyden gegebenen Brüche einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so kann diese Rechnung dadurch verkürzt werden, daß man zuvörderst mit demselben in die Nenner dividirt, und hierauf Zähler und Nenner eines jeden Bruchs nur mit dem bey dem andern Bruch erhaltenen Quotienten multiplicirt. Z. B. Es seien die Brüche $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{20}$ unter eine Benennung zu bringen. Da nun 12 und 20 den größten gemeinschaftlichen Divisor 4 haben, und 4 in 12 dividirt 3, in 20 aber 5 zum Quotienten giebt; so dürfen die Glieder des Bruchs $\frac{7}{12}$ nur mit 5, und die Glieder des Bruchs $\frac{11}{20}$ nur mit 3 multiplicirt werden, wodurch die Brüche $\frac{35}{60}$ und $\frac{33}{60}$ entstehen. Es seien die Brüche $\frac{5}{16}$ und $\frac{3}{8}$ gegeben. Der größte gemeinschaftliche Divisor beyder Nenner ist 16, folglich entstehen die Brüche $\frac{5}{16}$ und $\frac{6}{16}$, wo der zweyte Bruch ungeändert geblieben ist, weil 16 in den Nenner 16 dividirt 1 zum Quotienten giebt.

2) Wenn mehr Brüche gegeben sind, so wird entweder

(1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Product aus allen Nennern der übrigen Brüche multiplicirt.

Z. B. Es sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so werden die Zähler und Nenner des ersten Bruchs durch 15, des andern durch 10, und des dritten durch 6 multiplicirt, wodurch man $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$ und $\frac{18}{30}$ erhält, welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten als die gegebenen.

(2) Oder es werden alle Nenner der gegebenen Brüche in einander multiplicirt, welches Product der gemeinschaftliche Nenner genannt wird; in denselben wird mit allen Nennern der gegebenen Brüche dividirt, die hiedurch gefundenen Quotienten aber werden mit allen Zählern der gegebenen Brüche multiplicirt. Die hierdurch gefundenen Producte sind die Zähler der Brüche, welche alle den gemeinschaft-

stehen Nenner haben, und den gegebenen gleich sind. Diese Rechnungsart ist bequemer, als die erste, im Fall eine etwas beträchtliche Anzahl von Brüchen gegeben ist.

Z. B. Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so ist die Rechnung folgende:

	210		2
			3
$\frac{1}{2}$	105	105	
$\frac{2}{3}$	70	140	6
$\frac{3}{5}$	42	126	5
$\frac{2}{7}$	30	60	
			30
			7
			210

Der gemeinschaftliche Nenner, welcher aus dem Producte der Nenner aller gegebenen Brüche in einander entstanden ist, ist hier 210, die Quotienten aus allen Nennern in diesen gemeinschaftlichen Nenner sind 105, 70, 42, 30, die Producte aus allen Zählern in diese Quotienten sind 105, 140, 126, 60, folglich sind $\frac{105}{210}$, $\frac{140}{210}$, $\frac{126}{210}$, $\frac{60}{210}$ die Brüche, welche anstatt der gegebenen gesetzt werden können, und alle gleiche Nenner haben.

Anmerk. 1) Wenn unter den Nennern der gegebenen Brüche einer ist, durch welchen in einen andern Nenner ohne Rest dividirt werden kann, so kann der erste bey der Multiplication, wodurch der gemeinschaftliche Nenner gefunden wird, weggelassen werden. Ingleichen wenn zwey Nenner durch irgend eine Zahl ohne Rest dividirt werden können, so kann bey dieser Multiplication einer von den beyden Quotienten, welcher durch die Division einer solchen Zahl in einen von solchen beyden Nennern gefunden worden, anstatt des Nenners, davon er der Quotient ist, genommen werden. Z. B. Es sollen $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{2}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so ist die Rechnung folgende:

	24	
$\frac{3}{4}$	6	18
$\frac{5}{6}$	4	20
$\frac{7}{8}$	3	21
$\frac{1}{2}$	12	12

Hier

Hier sind bey der Multiplication, wodurch der gemeinschaftliche Nenner gesucht worden, die Nenner 4 und 2 übergangen, weil durch beyde in den Nenner 8 ohne Rest dividirt werden kann, und anstatt des Nenners 6 ist mit 3 multiplicirt worden, weil die beyden Nenner 6 und 8 durch 2 ohne Rest dividirt werden können, und 3 der Quotient aus der 2 in 6 ist; folglich durfte man nur 24 zum gemeinschaftlichen Nenner annehmen, welcher sonst, wenn alle Nenner in einander multiplicirt werden, 384 ist.

2). Um jedesmal den möglichst kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bekommen, verfährt man, zumal wenn eine beträchtliche Anzahl von Brüchen gegeben ist, folgendergestalt. Es seien die Brüche $\frac{1}{2}\ \frac{6}{7}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{6}\ \frac{11}{35}\ \frac{4}{5}\ \frac{17}{21}$ gegeben; so sucht man, wie hier unten geschehen ist, diejenigen kleinsten Zahlen auf, womit einer oder mehrere der gegebenen Nenner ohne Rest dividirt werden können. Man dividirt diese hierauf wirklich, setzt sodenn die übrigen, bey welchen diese Division nicht geschehen kann, mit den Quotienten wieder zusammen, und verfährt mit denen auf diese Art zusammengesetzten Zahlen wie vorhin, so lange bis sämmtliche Zahlen dividirt sind, und bey jedem die Zahl 1 zum Quotienten gekommen ist. Das Product aller Divisoren ist der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Nenner. Hiernach ist die Rechnung folgende:

2	3	5	7	2
				3
2 | 1				
7 | 7	7	7	1	6
3 | 3	1			5
6 | 3	1			
35 | 35	35	7	1	30
5 | 5	5	1		7
21 | 21	7	7	1	

219 kleinster gemeinschaftlicher Nenner.

Hier sind in der äußersten zur linken stehenden Columne alle gegebene Nenner 2, 7, 3, 6, 35, 5, 21, unter einander gesetzt; und zuerst ist mit 2 dividirt worden, wodurch die zweyte Columne folgendergestalt entstanden ist: 2 in 2 dividirt, giebt 1 zum Quotienten welche, daher oben in die zweyte Columne gesetzt ist; 2 läßt sich in die folgende Zahlen 7 und 3 nicht ohne Rest dividiren, daher 7 und 3 wieder in die zweyte Columne unverändert gesetzt sind. Ferner 2 in 6 giebt 3, welche daher neben der 6 in der zweyten Columne steht, die übrigen Zahlen der ersten Columne 35, 5 und 21 sind aus der vorigen Ursache sämmtlich unverändert wieder in die zweyte Columne gesetzt worden. Hierauf ist mit 3 dividirt, woraus die dritte, darauf mit 5, woraus die vierte, endlich mit 7, woraus die letzte Columne entstanden ist. Die Quotienten 1, welche nach und nach in jeder Columne entstehn, brauchen in den folgenden

Colum-

Cohnnen nicht weiter gesetzt zu werden. Demnach ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner das Product aus den Zahlen 2, 3, 5, 7, welches 210 ist.

Beyspiele zur Uebung.

Es seien folgende Brüche gegeben

I) $\frac{9}{14}$; $\frac{32}{63}$; $\frac{11}{18}$; $\frac{23}{42}$; $\frac{59}{84}$; ferner

II) Die Brüche $\frac{17}{30}$; $\frac{57}{110}$; $\frac{65}{66}$; $\frac{19}{165}$; so ist die Berechnung des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners derselben folgende:

I)

	2	2	7	3	3	
14	7	7	1			
63	63	63	9	3	1	
18	9	9	9	3	1	
42	21	21	3	1		
84	42	21	3	1		

II)

	3	5	2	11	
30	10	2	1		
110	110	22	11	1	
66	22	22	11	1	
165	55	11	11	1	

Bey dem ersten Beyspiel ist also das Product aus den Zahlen 2, 2, 7, 3, 3, oder 252, bey dem andern Beyspiel das Product 3, 5, 2, 11, oder 330 der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

23. Wie werden gemischte Brüche eingerichtet?

Es wird die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, welcher derselben angehängt ist, multiplicirt, und zu dem Product der Zähler dieses Bruchs addirt. Die Summe ist der Zähler zu einem unächten reinen Bruch, welcher den Nenner des gegebenen gemischten Bruchs hat, und diesem gemischten Bruch gleich ist.

Z. B. Es soll der Bruch $2\frac{3}{4}$ eingerichtet werden, so wird 2 mit 4 multiplicirt, und zu dem Product 8 der Zähler 3 addirt, die Summe 11 ist der Zähler eines Bruchs, welcher 4 zum Nenner hat, folglich $\frac{11}{4}$ ist. Dieser unächte reine Bruch aber gilt eben so viel als der gemischte $2\frac{3}{4}$.

Anmerk. Umgekehrt kann ein unächter Bruch wieder in einen gemischten verwandelt werden, wenn man mit dem Nenner desselben in seinen Zähler dividirt. Der Quotient giebt einen gemischten Bruch, welcher dem unächten gleich ist. Z. B. Es soll $\frac{21}{4}$ in einen gemischten Bruch verwandelt werden, so wird 21 durch 4 dividirt. Der Quotient $5\frac{1}{4}$ ist eben soviel als $\frac{21}{4}$.

24. Wie

24. Wie wird eine ganze Zahl in einen Bruch verwandelt?

1) Dies kann schon dadurch geschehen, daß die gegebene ganze Zahl zum Zähler eines Bruchs gemacht wird, dessen Nenner 1 ist. Ist aber der Nenner, den dieser Bruch haben soll, gegeben, so wird die gegebene ganze Zahl mit diesem Nenner multiplicirt; das Product giebt den Zähler zu einem Bruch, welcher den gegebenen Nenner hat, und der gegebenen ganzen Zahl gleich ist.

Z. B. Es soll 3 in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 4 ist, so wird 3 mit 4 multiplicirt, das Product giebt den Zähler 12 zu dem Bruche $\frac{12}{4}$, welcher den gegebenen Nenner hat, und eben so viel als 3 gilt. Da nemlich 1 Ganzes so viel ist, als 4 Viertel, so sind 3 Ganze so viel, als 3 mal 4 d. i. 12 Viertel. Auch ist der Bruch $\frac{3}{1}$ soviel als 3.

2) Insonderheit geschieht diese Verwandelung durch die **Reduction**, wenn eine ganze benannte Zahl in einen Bruch einer benannten Einheit von einer höhern Ordnung verwandelt wird.

25. Wie wird eine ganze benannte Zahl in einen Bruch reducirt?

Es wird 1) die gegebene ganze Zahl zum Zähler eines Bruchs gemacht, dessen Nenner anzeigt, wieviel eine ganze Einheit der höhern Ordnung, davon die gegebene Zahl ein Bruch werden soll, solcher Einheiten der niedrigern Ordnung enthält, als die Benennung der gegebenen Zahl ausdruckt; 2) wird dieser Bruch, wenn es möglich ist, aufgehoben.

Z. B. Es sollen 16 Ggr. in einen Bruch von einem Thaler reducirt werden; so wird 16 zum Zähler eines Bruchs gemacht, dessen Nenner 24 ist, weil ein Thaler 24 Groschen enthält, und hierauf der dadurch gefundene Bruch $\frac{16}{24}$ durch 8 aufgehoben, da denn der Bruch $\frac{2}{3}$ Thaler gefunden

den wird, welcher eben so viel als 16 Groschen ist. Eben so wird anstatt 7 Pfennige der Bruch $\frac{7}{288}$ rthlr. gefunden, indem ein Thaler 288 Pfennige enthält.

Anmerk. Wenn ein benannter gemischter Bruch reducirt werden soll; so muß derselbe vorher eingerichtet, hierauf der Nenner desselben mit einer Zahl multiplicirt werden, welche anzeigt, wieviel eine ganze Einheit der höhern Ordnung, davon der gegebene Bruch ein anderer Bruch werden soll, solcher Einheiten der niedrigern Ordnung enthält, als die Benennung des gegebenen Bruchs ausdruckt. Z. B. Es sollen $14\frac{2}{5}$ Groschen in einen Bruch von einem Thaler verwandelt werden; so wird aus dem gegebenen gemischten Bruche zuerst ein unächter $\frac{72}{5}$ gemacht, hierauf der Nenner desselben mit 24 multiplicirt, und endlich der dadurch gefundene Bruch $\frac{72}{120}$ durch 24 aufgehoben, da denn der Bruch $\frac{3}{5}$ Thaler gefunden wird, welcher eben so viel gilt als $14\frac{2}{5}$ Groschen. Auf eine ähnliche Art wird auch ein eigentlicher Bruch reducirt. Z. B. $\frac{2}{5}$ Groschen sind $\frac{2}{120}$ oder $\frac{1}{60}$ rthlr, wo 5 in 24 multiplicirt, und der dadurch entstandene Bruch $\frac{2}{120}$ mit 2 aufgehoben ist.

Die vier Species in Brüchen.

26. Wie werden zwey oder mehrere Brüche addirt?

1) Wenn die gegebenen Brüche **gleiche Nenner** haben; so werden blos die Zähler addirt, und die Summe wird zum Zähler eines Bruchs gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist der gesuchten Summe aller gegebenen Brüche gleich.

Z. B. Es sollen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$ addirt werden; so ist die Summe $\frac{11}{7}$, oder, wenn dieser unächte Bruch in einen gemischten verwandelt wird, $1\frac{4}{7}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche **verschiedene Nenner** haben; so werden sie erst alle unter einerley Benennung gebracht, worauf die neuen Zähler derselben, wie vorhin, addirt werden, und diese Sum-

me

ne zum Zähler eines Bruchs gemacht wird, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Z. B. Es sollen $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{8}$ addirt werden; so ist die Rechnung folgende.

	168	
$\frac{2}{3}$	56 . . .	112
$\frac{5}{6}$	28 . . .	140
$\frac{2}{7}$	24 . . .	48
$\frac{3}{8}$	21 . . .	63

$$\frac{363}{168} = 2\frac{27}{168} = \frac{9}{56}$$

Exempel zur Uebung.

Es sollen $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{5}$ addirt werden. Die Summe ist $1\frac{3}{60}$.

Es sollen $\frac{1}{6}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{24}$ addirt werden. Die Summe ist 3.

Es sollen $\frac{21}{9}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{13}{21}$ $\frac{22}{24}$ $\frac{21}{30}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{3}{14}$ $\frac{37}{30}$ addirt werden. Die Summe ist 4.

Anmerk. Wenn gemischte Brüche addirt werden sollen; so werden zuerst die den ganzen Zahlen angehängten Brüche, hernach die ganzen Zahlen allein addirt, zu der letzten Summe aber noch die ganzen Einheiten hinzugethan, welche aus der Addition der Brüche entstanden sind. Z. B. Es sollen $3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $6\frac{3}{4}$ addirt werden, die Summe der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ allein genommen, ist $1\frac{2}{12}$ oder $1\frac{1}{12}$, die Summe der ganzen Zahlen allein genommen, ist 14, folglich die Summe der gemischten Brüche $15\frac{1}{12}$. Eben so ist die Summe von $3\frac{4}{7}$, $5\frac{3}{8}$, $16\frac{7}{9}$, $31\frac{5}{25}$, $43\frac{7}{11}$ gleich 100.

27. Wie wird ein Bruch von einem gröſsern subtrahirt?

1) Wenn die gegebenen Brüche beyde **gleiche Nenner** haben; so wird blos der Zähler des kleinern Bruchs

Bruchs von dem Zähler des größern subtrahirt, und der Rest zum Zähler eines Bruchs gemacht, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat. Dieser Bruch ist die gesuchte Differenz der gegebenen Brüche.

Z. B. Es soll $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahirt werden; so ist die Differenz $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$.

2) Wenn die gegebenen Brüche **verschiedene Nenner** haben; so werden sie erst beyde unter gleiche Benennung gebracht, worauf der neue Zähler des kleinern Bruchs von dem neuen Zähler des größern subtrahirt, und die Differenz zum Zähler eines Bruchs gemacht wird, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Z. B. Es soll $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ subtrahirt werden; so werden erst beyde in die Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$ verwandelt, und alsdenn 8 von 9 subtrahirt, folglich ist die Differenz beyder Brüche $\frac{1}{12}$.

Anmerk. 1) Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden soll; so wird entweder diese ganze Zahl erst in einen Bruch verwandelt, welcher den Nenner des gegebenen Bruchs hat, wie, wenn z. B. $\frac{3}{4}$ von 6 subtrahirt werden soll, da 6 erst in den Bruch $\frac{24}{4}$ verwandelt, und alsdenn 3 von 24 subtrahirt wird, folglich die gesuchte Differenz $\frac{21}{4}$ oder $5\frac{1}{4}$ ist: oder es wird bey der ganzen Zahl (wie hier 6) eine Einheit geborgt, und nur diese in einen Bruch mit demselben Nenner verwandelt. So wird aus 6 hiedurch $5\frac{4}{4}$, von welcher $\frac{3}{4}$ abgezogen werden können.

2) Wenn gemischte Brüche von einander subtrahirt werden sollen; so werden sie entweder erst beyde in unächte verwandelt und alsdenn subtrahirt, oder es wird der Bruch, welcher der ganzen Zahl, die subtrahirt werden soll, angehänge ist, von dem Bruch der größern Zahl, und hernach die kleinere ganze Zahl von der größern abgezogen, im Fall aber der Bruch der kleinern Zahl größer ist als derjenige der größern, so wird von der größern ganzen Zahl 1 geborgt, und diese in einen Bruch verwandelt, welcher den Nenner des kleinern Bruchs hat, hierauf zu demselben addirt, und endlich die Subtraction der Brüche und ganzen Zahlen vorgenommen. Z. B. Es soll $2\frac{1}{4}$ von $3\frac{3}{4}$ abgezogen werden, so ist die Differenz $3\frac{2}{4}$ oder $3\frac{1}{2}$. Ferner, es soll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{2}{3}$ subtrahirt

subtrahirt werden; so müssen entweder beyde erst in die unächten Brüche $\frac{14}{3}$ und $\frac{13}{2}$, hernach in die Brüche mit gleichen Nennern $\frac{28}{6}$ und $\frac{39}{6}$ verwandelt, und alsdenn die Zähler subtrahirt werden, da denn die Differenz $\frac{11}{6}$ oder $1\frac{5}{6}$ ist: oder wenn die Brüche und ganzen Zahlen allein subtrahirt werden sollen, so muß, weil der Bruch $\frac{2}{3}$ größer ist als $\frac{1}{2}$, erst 1 von der 6 geborgt, diese in den Bruch $\frac{2}{2}$ verwandelt und dazu $\frac{1}{2}$ addirt werden, worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$, nachdem beyde in die Brüche mit gleichen Nennern $\frac{4}{6}$ und $\frac{9}{6}$ verwandelt worden, subtrahirt, und die Differenz $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der beyden ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 ist, gesetzt wird, folglich ist die gesuchte Differenz wieder $1\frac{5}{6}$.

28. Wie wird ein Bruch mit einem andern multiplicirt?

Es wird der Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, ingleichen der Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern multiplicirt. Das erste Product giebt den Zähler, das andere den Nenner eines Bruchs, welcher dem gesuchten Product beyder Brüche gleich ist.

Z. B. Es soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt werden, so wird 3 mit 5 und 4 mit 7 multiplicirt. Das erste Product 15 giebt den Zähler, das andere 28 den Nenner des Bruchs $\frac{15}{28}$, welcher das gesuchte Product ist.

Anmerk. 1) Nach der Erklärung der Multiplication heißt den Bruch $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{7}$ multipliciren, so viel, als den siebenten Theil von $\frac{3}{4}$ fünfmal nehmen. Wird nun der Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ mit 7 multiplicirt, so wird der Bruch dadurch siebenmal kleiner, d. i. $\frac{3}{28}$ ist der siebente Theil von $\frac{3}{4}$; wird hierauf der Zähler von $\frac{3}{28}$ mit 5 multiplicirt, so wird dieser Bruch dadurch 5mal größer, folglich ist $\frac{15}{28}$ das gesuchte Product. Hieraus erhellt zugleich, daß im Fall der Multiplicator ein ächter Bruch ist, das Product allemal kleiner als der Multiplicandus seyn müsse. Denn es wird bey der Multiplication nur ein Theil des Multiplicandus mehrmals genommen, und zwar nicht so oft, als geschehn müßte, wenn aus diesem Theil der Multiplicandus selbst werden sollte. Hier wird z. B. von $\frac{3}{4}$ nur der siebente Theil,

und dieser nur fünfmal genommen. Würde er siebenmal genommen, so käme erst der Multiplicandus selbst heraus. Folglich ist das Product kleiner, als der Multiplicandus.

9) Es kann die Multiplication der Brüche auch auf folgende Art verrichtet werden. Es wird der Zähler des zu multiplicirenden Bruchs durch den Nenner, und sein Nenner durch den Zähler des andern Bruchs dividirt. Der erste Quotient giebt den Zähler und der andere den Nenner des gesuchten Products. Z. B. Es soll $\frac{8}{9}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden; so wird 8 durch 4, und 9 durch 3 dividirt. Der erste Quotient 2 giebt den Zähler und der andere 3 den Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$, welcher das gesuchte Product ist. Es giebt noch mehrere ähnliche Arten der Multiplication, wodurch aber, wie auch bey dieser Art, zuweilen gebrochene Brüche zum Product kommen. Z. B. Es soll $\frac{4}{5}$ mit $\frac{6}{7}$ multiplicirt werden, das Product ist $\frac{4}{\frac{7}{6}}$ oder $\frac{24}{35}$. Die Gründe dieser Regeln beruhen auf den verschiedenen möglichen Arten, einen Bruch zu verkleinern oder zu vergrößern, deren in den Anmerkungen zu Fr. 19. gedacht worden ist.

8) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so darf man nur den Zähler des Bruchs mit der gegebenen ganzen Zahl multipliciren. Das Product giebt den Zähler eines Bruchs, welcher den Nenner des gegebenen Bruchs hat, und das gesuchte Product ist. Z. B. Es soll $\frac{3}{4}$ mit 2 multiplicirt werden, das Product ist $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{2}{4}$. Oder, man dividirt den Nenner des Bruchs mit der gegebenen ganzen Zahl. Der Quotient giebt den Nenner eines Bruchs, der den Zähler des gegebenen Bruchs hat, und das gesuchte Product ist. Z. B. Es soll $\frac{5}{8}$ mit 4 multiplicirt werden; das Product ist $\frac{5}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$.

4) Wenn gemischte Brüche multiplicirt werden sollen, so ist es am bequemsten, sie erst in unächte zu verwandeln, und alsdenn auf die angezeigte Weise zu multipliciren. Z. B. Es soll $3\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{7}$ multiplicirt werden, das Product ist $\frac{210}{14}$ oder 15. Es soll $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multiplicirt werden, das Product ist $\frac{60}{15}$ oder 4.

89. Wie wird ein Bruch durch einen andern dividirt?

Es wird der Divisor **umgekehrt**, das ist, der Zähler desselben wird zum Nenner und der Nenner zum Zähler gemacht, hierauf wird derselbe mit dem andern

andern Bruch multiplicirt. Das hiedurch gefundene Product ist der gesuchte Quotient.

Z. B. Es soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{4}$ dividirt werden; so wird $\frac{1}{4}$ als der gegebene Divisor umgekehrt, so daß daraus $\frac{4}{1}$ werde, dieser Bruch wird mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt, das Product $\frac{8}{3}$ oder $2\frac{2}{3}$ ist der gesuchte Quotient.

Anmerk. 1) Nach der Erklärung der Division heißt, den Bruch $\frac{3}{4}$ durch $\frac{5}{7}$ dividiren, diejenige Zahl finden, welche mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt werden muß, damit $\frac{3}{4}$ herauskomme. Daß hienach der gefundene Quotient $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$ nicht nur richtig sey, sondern auch in jedem andern ähnlichen Fall der Quotient nach den hier gegebenen Regeln, richtig gefunden werde, erhellt, wenn man den Quotienten folgendergestalt vorstellt: $\frac{3.7}{4.5}$, wo anstatt der Producte 21 und 20 blos die Factoren mit dem Punct, als dem Zeichen der Multiplication gesetzt sind. Wird nun $\frac{3.7}{4.5}$ wieder durch den Divisor $\frac{5}{7}$ multiplicirt; so wird nach den Regeln der Multiplication das Product folgendergestalt vorzustellen seyn $\frac{3.7.5}{4.5.7}$; wo Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Divisor 5.7, d. i. 5mal 7 oder 35 haben, daher das Product nothwendig $\frac{3}{4}$ seyn muß. In jedem ähnlichen Fall gilt ein ähnlicher Beweis, welcher jedoch auch noch aus manchen andern Betrachtungen geführt werden kann. Uebrigens folgt auch hieraus, daß, wenn der Divisor ein ächter Bruch ist, der Quotient nothwendig allemal größer als der Dividendus seyn muß. Da nemlich derselbe bey der Rechnung umgekehrt wird; so entsteht ein unächter Bruch, der größer als 1 ist, daher, indem der Dividendus mit ihm multiplicirt wird, ein Product entstehn muß, das größer als der Dividendus ist.

2) Da die Division der Brüche auf diese Art in eine Multiplication verwandelt wird; so giebt es auch mehrere Arten zu dividiren. Dies kann unter andern auch auf folgende Art geschehn. Es wird der Zähler des einen Bruchs durch den Zähler des andern, und der Nenner des einen Bruchs durch den Nenner des andern dividirt. Der erste Quotient giebt den Zähler, der andere den Nenner des gesuchten Products. Z. B. Es soll $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden, so wird 8 durch 2, und 9 durch 3 dividirt; der erste Quotient 4 ist der Zähler, der andere 3 der Nenner des gesuchten

Quotienten $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$. Doch kommen auch hier, wie bey den übrigen Arten der Division zuweilen gebrochene Brüche zu Quotienten. Z. B. Es soll $\frac{4}{5}$ durch $\frac{6}{7}$ dividirt werden. Der Quotient ist $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}}$ oder $\frac{28}{30}$ oder $1\frac{14}{15}$.

3) Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so darf man nur den Nenner des Bruchs mit der gegebenen Zahl multipliciren. Das Product giebt den Nenner eines Bruchs, welcher den Zähler des gegebenen Bruchs hat, und der gesuchte Quotient ist. Z. B. Es soll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividirt werden; der Quotient ist $\frac{3}{8}$. Oder, man dividirt den Zähler des Bruchs mit der gegebenen ganzen Zahl. Der Quotient giebt den Zähler eines Bruchs, der den Nenner des gegebenen Bruchs hat, und der gesuchte Quotient ist. Z. B. Es soll $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt werden, der Quotient ist $\frac{2}{9}$.

4) Wenn gemischte Brüche dividirt werden sollen, so ist es am bequemsten, sie erst in unächte zu verwandeln, und alsdenn auf die angezeigte Weise zu dividiren. Z. B. Es soll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividirt werden, der Quotient ist $\frac{68}{35}$ oder $1\frac{33}{35}$. Es soll $6\frac{2}{9}$ durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden, der Quotient ist $\frac{448}{45}$ oder $9\frac{43}{45}$.

5) Da ein jeder Bruch als ein Quotient angesehn werden kann, dessen Dividendus der Zähler, und dessen Divisor der Nenner ist; so können durch die hier gegebenen Regeln der Division gebrochene Brüche in einfache Brüche von gleichem Werthe verwandelt werden, wenn der Zähler wirklich durch den Nenner dividirt wird. Z. B. Aus $\frac{\frac{1}{4}}{2}$ wird $\frac{1}{8}$, indem $\frac{1}{4}$ durch 2; aus $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ wird $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$, indem $\frac{1}{2}$ durch $\frac{3}{4}$; aus $\frac{\frac{1}{2}}{2\frac{3}{4}}$ wird $\frac{2}{11}$ oder $\frac{2}{11}$ indem $\frac{1}{2}$ durch $2\frac{3}{4}$ oder $\frac{11}{4}$; endlich aus $\frac{21\frac{1}{7}}{7}$ wird $3\frac{147}{5}$; indem 21 durch $52\frac{1}{7}$ oder $3\frac{65}{7}$ dividirt wird. (Man vergl. hiemit Fr. 18. Anmerk.)

6) Um Decimalbrüche durch einander zu dividiren, bedarf es nach dem vorhergehenden keiner besondern Regeln. Nur ist zu merken, daß um die Division weiter fortsetzen, und den Quotienten genauer finden zu können, dem Dividendus zuweilen Nullen angehängt werden. Z. B. Es sey 0,000002 durch 0,0234 zu dividiren; so werden zuvörderst Divisor und Dividendus zehntausendmal gröber gemacht, wodurch der Divi-

Divisor 234 und der Dividendus 0,02 wird. Hierauf wird nach den oben gegebenen Regeln folgendergestalt dividirt.

```
234) 0,02000000 | 0,00008547
     1872...
     ------
      1280..
      1170..
      ------
       1100.
        936.
       -----
        1640
        1638
       -----
           2
```

Hier sind zuvörderst die Ziffern des Quotienten 8547, wie bey ganzen Zahlen gefunden worden, und nach vollendeter Division hat durch Versetzung der Nullen das Comma seine erforderliche Stelle erhalten, weil für den Dividendus 8 Decimalstellen angenommen sind.

7) Die Species mit benannten Brüchen erfordern außer der oben von den benannten Zahlen überhaupt gegebenen Anweisung keine besondern Regeln, wie aus folgenden Beyspielen erhellt.

Addition.

I.			II.		
$6\frac{2}{3}$ thlr.	ʒ gr.	$3\frac{7}{8}$ pf.	oder 6 thl. 16 gr.		$3\frac{7}{8}$ pf.
2 —	$15\frac{2}{7}$ —	ʒ —	— 2 —	15 —	$3\frac{3}{4}$ —
$9\frac{5}{6}$ —	ʒ —	$5\frac{2}{9}$ —	— 9 —	15 —	$5\frac{2}{9}$ —
4 —	$21\frac{3}{8}$ —	ʒ —	— 4 —	21 —	$4\frac{1}{2}$ —
$2\frac{1}{4}$ —	ʒ —	$6\frac{2}{5}$ —	— 2 —	6 —	$6\frac{2}{5}$ —
3 —	$12\frac{1}{2}$ —	ʒ —	— 3 —	12 —	6 —
Sum. $29\frac{5}{24}$ thl.	$2\frac{9}{16}$ gr.	$3\frac{17}{60}$ pf.	od. 29 thl.	15 gr.	$5\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{3}{0}$ pf.

Wenn auf die erste hier vorgestellte Art gerechnet wird; so müssen die in der Summe den Thalern, Groschen und Pfennigen angehängten Brüche resolvirt werden. Bequemer geschieht dies aber sogleich bey jedem einzelnen Posten, da denn die Rechnung diejenige wird, die hier unter N. II. vorgestellt ist.

Subtraction.

$4\frac{3}{8}$ rthl.	ʒ gr.	$8\frac{5}{7}$ pf.	oder 4 rthl.	18 gr.	$8\frac{5}{7}$ pf.
1 —	$19\frac{1}{3}$ —	$10\frac{1}{5}$ —	— 1 —	20 —	$2\frac{1}{5}$ —
$2\frac{3}{4}$ rthl.	$3\frac{2}{8}$ gr.	$10\frac{1}{3}\frac{8}{5}$ pf.	od. 2 rthl.	22 gr.	$6\frac{1}{3}\frac{8}{5}$ pf.

Multiplication und Division.

Es sollen $28\frac{2}{3}$ Rthl. und $8\frac{1}{2}$ Pf. mit $6\frac{7}{8}$ multiplicirt werden. Hier wird entweder erst $8\frac{1}{2}$ mit $6\frac{7}{8}$ oder $\frac{4}{5}$ mit $\frac{5}{8}$, und hernach auch $28\frac{2}{3}$ oder $\frac{86}{3}$ mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt, oder es wird $\frac{2}{3}$ Rthlr. erst in 16 Ggr. resolvirt, hernach der ganze Multiplicandus in Pfennige, ferner in einen unächten Bruch verwandelt, hierauf mit $\frac{5}{8}$ multiplicirt, und das Product wieder in Thalern, Groschen und Pfennigen ausgedruckt, da denn das gesuchte Product 197 Rthlr. 6 Gr. $8\frac{3}{4}$ Pf. ist.

Es sollen $68\frac{2}{3}$ Rthlr. und $5\frac{2}{3}$ Pf. durch $4\frac{1}{2}$ dividirt werden. Der Quotient ist 15 Rthlr. 4 Gr. $9\frac{7}{7}$ Pf.

Die Potenzen.

30. Was ist eine Potenz oder Dignität?

Ein Product aus gleichen Factoren; insonderheit wird 1) ein Product aus zwey gleichen Factoren, oder das Product, welches entsteht, wenn eine Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, die zweyte Potenz oder Dignität, oder das Quadrat dieser Zahl genannt, diese Zahl selbst aber heißt in Ansehung der daraus entstandenen Potenz die Quadratwurzel.

Z. B. Wenn 2 mit 2 multiplicirt wird; so wird das Product 4 die zweyte Potenz oder das Quadrat von 2, und diese Zahl 2 die Quadratwurzel von 4 genannt. Eben so ist 100 das Quadrat von 10, und 10 die Quadratwurzel von 100.

2) Ein Product aus drey gleichen Factoren, oder das Product, welches entsteht, wenn eine Zahl erst mit sich selbst, und das Product noch einmal mit derselben Zahl multiplicirt wird, heißt die dritte Potenz oder die Cubiczahl oder der Cubus (Würfel) dieser Zahl, diese Zahl selbst aber wird in Ansehung der daraus entstandenen Potenz die Cubicwurzel genannt.

Z. B. Wenn 2 mit 2 multiplicirt, und das Product 4 noch einmal mit 2 multiplicirt wird; so wird das Product 8 die dritte Potenz oder die Cubiczahl von 2, und diese Zahl 2 die Cubicwurzel von 8 genannt. Eben so ist 1000 der Cubus von 10, und 10 die Cubicwurzel von 1000.

3) Ein

3) Ein Product von vier gleichen Factoren heißt die **vierte Potenz** oder das **Biquadrat**, Producte von fünf, sechs, sieben u. s. w. gleichen Factoren heißen die **fünfte, sechste, siebente** u. s. w. Potenz jedes dieser Factoren, auch erhellt aus dem vorigen, was unter der **Biquadratwurzel**, ferner unter der **fünften, sechsten, siebensten Wurzel** einer Zahl verstanden werde.

Anmerk. 1) Eine Wurzel aus einer Potenz ausziehn, heißt die Factoren finden, deren Product die gegebene Potenz ist. Z. B. die Quadratwurzel aus der Zahl 16 ausziehen, heißt die Zahl finden, welche mit sich selbst multiplicirt 16 giebt. Das Zeichen dieser Rechnung ist $\surd$, welches das Wurzelzeichen genannt wird.

2) Diejenige Zahl, welche anzeigt, die wievielte Potenz eine Zahl sey, wird der Exponent der Potenz genannt. Z. B. der Exponent der zweyten Potenz ist 2, der dritten 3, der vierten 4 u. s. w. Dieser Exponent wird auch in die Oefnung des Wurzelzeichens gesetzt, um anzuzeigen, die wievielte Wurzel aus der unter dem Zeichen stehenden Zahl ausgezogen werden soll. Jedoch wird in diesem Fall der Exponent 2 gewöhnlich weggelassen. Z. B. $\surd 16$ zeigt an, daß aus 16 die Quadratwurzel; $\sqrt[3]{27}$ zeigt an, daß aus 27 die Cubicwurzel gezogen werden soll. Die Potenz einer Zahl finden, heißt auch sie zu dieser Potenz erheben. Daß eine Zahl auf eine gewisse Potenz erhoben werden solle, wird dadurch angezeigt, daß zur Rechten der niedrigsten Ziffer derselben an ihrer Spitze der Exponent der Potenz gesetzt wird. Z. B. 16^2 zeigt an, daß das Quadrat; 16^3 aber zeigt an, daß der Cubus der Zahl 16 gefunden werden soll.

3) Zur mehreren Bequemlichkeit des Ausziehens der Wurzeln dient folgende kleine Wurzeltafel, in welcher die Quadrat- und Cubikzahlen für die Wurzeln von 1 bis 9 befindlich sind.

Wurzeln.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

4) Wenn die Wurzeln in ihren niedrigsten Stellen Nullen oder Decimalbrüche haben; so haben die Quadrate derselben zweymal, und die Würfel dreymal so viel Nullen oder Decimalstellen, welches aus den Regeln der Multiplication erhellet. Z. B. Von der Zahl 40 ist das Quadrat 1600 und der Würfel 64000; von der Zahl 0,07 ist das Quadrat 0,0049 und der Würfel 0,000343. Eben so sind von

den Wurzeln,	die Quadrate,	die Würfel;
11,5	132,25	1520,875
1,15	1,3225	1,520875
0,115	0,013225	0,001520875

woraus zugleich erhellt, daß alle Quadrate eine gerade Anzahl von Decimalstellen, alle Würfel aber eine Anzahl Decimalstellen haben, welche ein Vielfaches von 3 ist. Aehnliche Sätze gelten auch von den höhern Potenzen.

5) Das Quadrat oder der Würfel eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler das Quadrat oder der Würfel des Zählers, und dessen Nenner das Quadrat oder der Würfel des Nenners der Wurzel ist, welches gleichfalls aus den Regeln der Multiplication erhellet. Z. B. Von der Wurzel $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9}$ das Quadrat, und $\frac{8}{27}$ der Würfel. Die Potenzen eines eigentlichen Bruchs sind daher kleiner, als ihre Wurzel, und zwar desto kleiner, je größer ihr Exponent ist. Das Quadrat der Würfel, und überhaupt jede Potenz eines jeden Bruchs, der keiner ganzen Zahl gleich ist, ist wiederum ein solcher Bruch; und wenn daher eine gegebene ganze Zahl z. B. kein Quadrat oder Würfel einer ganzen Zahl ist; so ist sie auch kein Quadrat oder Würfel irgend eines eigentlichen oder uneigentlichen Bruchs.

31. Wie wird eine Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl ausgezogen?

Erster Fall. Wenn die gegebene Zahl keine Decimalbrüche hat.

1) Es wird die gegebene Zahl von der Rechten gegen die linke in Classen abgetheilt, deren jede zwey Ziffern enthält, doch kann die äußerste oder erste Classe zur linken auch nur eine Ziffer haben.

Z. B. Es sollen aus den Zahlen 132496 und 1968409 die Quadratwurzeln ausgezogen werden; so enthält die erste Zahl 3, und die andere 4 Classen, und die äußerste Classe dieser andern Zahl besteht nur aus einer Ziffer, nemlich 1, wie aus der weiter unten befindlichen Rechnung zu sehen ist.

2) Wird in obiger Wurzeltafel eine Quadratzahl gesucht, die so groß oder nächst kleiner ist als die erste Classe. Die Wurzel dieser Zahl ist der erste Theil oder die erste Ziffer der gesuchten Quadratwurzel.

Die Zahl 13 der ersten Classe (man sehe das erste unten berechnete Beyspiel) fällt, wie aus der Wurzeltafel erhellet, zwischen

9 und

9 und 16; es iſt alſo 9 das nächſtkleinere Quadrat, und die Wurzel davon 3 iſt der erſte Theil der Wurzel, welcher hinter den Strich der letzten Claſſe zur Rechten geſchrieben wird.

3) Wird das Quadrat des gefundenen erſten Theils der Wurzel von der erſten Claſſe abgezogen, und neben den Reſt der erſten Claſſe die zweyte Claſſe geſchrieben.

Das Quadrat des erſten Theils 3 iſt 9, und 9 von 13 bleibt 4; zu dieſer Zahl kommt die 24 der zweyten Claſſe, alſo 424.

4) Wird der gefundene erſte Theil der Wurzel verdoppelt, dieſes doppelte unter den Reſt und die daben ſtehende zweyte Claſſe ſo geſchrieben, daß die niedrigſte Ziffer des doppelten unter die erſte Ziffer der zweyten Claſſe komme.

Das doppelte von 3 iſt 6, welche 6 alſo unter die erſte Zahl 2 der zweyten Claſſe geſetzt wird.

5) Wird mit dieſem doppelten in die darüber ſtehenden Zahlen dividirt, wobey zu merken, daß zuweilen der Quotient um der folgenden Multiplication willen kleiner, als bey der gewöhnlichen Diviſion genommen werden muß.

Die über der 6 ſtehende Zahl 42 giebt, durch 6 dividirt, zum Quotienten eigentlich 7, welches aber hier, wie gleich aus der folgenden Rechnung erhellt, zu viel iſt, daher wird zum Quotienten 6 genommen.

6) Wird der Quotient, welcher **der zweyte Theil der Wurzel** iſt, neben den erſten Theil derſelben, und zugleich neben das doppelte des erſten Theils unter die zweyte Ziffer der zweyten Claſſe geſetzt.

Der gefundene Quotient 6 wird neben die 3 hinter den Strich der letzten Claſſe zur Rechten, und neben die 6, mit welcher dividirt worden, unter die 4 geſetzt.

7) Wird mit eben dieſem zweyten Theil der Wurzel das doppelte und die daneben geſetzte Ziffer multiplicirt, und das Product von dem Reſt der erſten Claſſe und von der daneben geſetzten zweyten Claſſe ſubtrahirt.

66 wird mit 6 multiplicirt, das Product 396 darunter geſetzt, und von 424 abgezogen. Die Zahl 66 iſt in eine Parentheſe geſetzt, um die beyden Zahlen, mit welchen die Subtraction

vorgenommen wird, desto leichter zu unterscheiden. Wäre vorher 7 zum Quotienten genommen worden, so hätte 67 mit 7 multiplicirt werden müssen, das Product 469 kann aber, weil es zu groß ist, von 424 nicht abgezogen werden.

8) Wird neben den Rest der zweyten Classe die dritte geschrieben.

Der Rest ist hier 28, neben welchen die folgende Classe 96 gesetzt wird, also 2896.

9) Werden die gefundenen beyden ersten Theile der Wurzel verdoppelt, dieses doppelte unter den Rest der zweyten und die daneben stehende dritte Classe so, wie vorhin, geschrieben, und nachher mit dieser dritten und den folgenden Classen eben so wie mit der zweyten verfahren, bis alle Theile der Wurzel gefunden worden, welche aus so viel Ziffern bestehn muß, als die gegebene Zahl Classen hat.

Das doppelte von 36 ist 72, welches unter 2896 so geschrieben wird, daß die niedrigste Zahl 2 unter die erste Zahl der neuen Classe 9 kommt. Hierauf wird mit 7 in 28 oder eigentlich mit 72 in 289 dividirt, der Quotient 4 als der dritte der Wurzel neben 36 und 72 gesetzt, 724 mit 4 multiplicirt, und das Product 2896 von 2896 abgezogen. Da kein Rest bleibt, auch keine Classe des Quadrats mehr übrig ist, so ist 364 genau die gesuchte Quadratwurzel von 132496. Wenn noch eine neue Classe hinzuzusetzen wäre, so würde nun mehro mit 364 eben so, wie vorher mit 36 verfahren.

13	24	96	364
9			

1	96	84	09	1403
1				

424	96
(66)	(24)
396	96
2896	8409
(724)	(2803)
2896	8409
0	0

Anmerk.

Anmerk. 1) Wenn der jedesmalige Dividendus von Nr. 5. für den Divisor zu klein ist, so wird eine 0 als der folgende Theil der Wurzel hingesetzt, die folgende Classe dazugenommen, und sodann, wie vorhin verfahren, wie aus dem zweyten Beyspiel erhellt.

2) Wenn bey der Ausziehung einer Quadratwurzel aus einer gegebenen Zahl nach vollendeter Rechnung ein Rest bleibt; so ist die gegebene Zahl kein Quadrat, sondern um den Rest größer, als das Quadrat der gefundenen Wurzel. Z. B. Wenn aus der Zahl 6563 die Quadratwurzel ausgezogen wird; so kommt zur Wurzel 81, und es bleibt 2 zum Rest, welches anzeigt, daß das Quadrat von 81 um 2 kleiner, als die Zahl 6563, folglich 6561 sey. Die Aufgabe, aus einer gegebenen Zahl, welche kein wirkliches Quadrat ist, die Quadratwurzel auszuziehn, will demnach nur so viel sagen: Man soll diejenige Zahl finden, deren Quadrat der gegebenen Zahl am nächsten kommt.

3) Die Gründe der Richtigkeit der hier gegebenen Regeln beruhen auf Eigenschaften der Quadratzahlen, die sich am leichtesten durch Hülfe der Buchstabenrechenkunst vortragen lassen.

Zweyter Fall. Wenn die gegebene Zahl Decimalbrüche hat.

1) Man theilt die gegebene Zahl, wie vorhin bey ganzen Zahlen gezeigt ist, in Classen, deren jede zwey Ziffern bekommt; jedoch wird hier die Theilung allemal von der Stelle des Comma angefangen, und auf beyden Seiten desselben, wo es nöthig ist, fortgesetzt, wobey noch zu merken, daß, wenn bey dieser Theilung für die niedrigste Classe der Decimalbrüche nur eine Ziffer übrig bleibt, die zweyte fehlende Stelle dieser Classe noch mit einer Null auszufüllen ist.

2) Hierauf wird die Rechnung genau nach den im Vorhergehenden bey ganzen Zahlen gegebenen Regeln gemacht, ohne während der Rechnung auf den Werth der Ziffer zu sehen. Nach vollendeter Rechnung giebt man der gefundenen Wurzel so viele Decimalstellen, als die gegebene Quadratzahl Classen für die Decimalbrüche hatte.

Z. B.

Z. B. Es soll aus den Zahlen 625,45009 und 0,003600960064 die Quadratwurzel ausgezogen werden; so ist, die Rechnung folgende:

I.

6	25,	45	00	90	25,009
4					
225					
(45)					
225					
450890					
(50009)					
450081					
9					

II.

0,	00	36	00	96	09	64	0,060008
36							
96 00 64							
(12 00 08)							
96 00 64							
0							

Hier ist zuvörderst in beyden Beyspielen die gegebene Zahl so in Classen getheilt worden, daß das Comma zugleich zwey Classen von einander trennt. Es würde unrichtig die erste Zahl folgendergestalt getheilt seyn 62 | 5,4 | 50 | 09. Bey eben dieser ersten Zahl mußte nach der niedrigsten Ziffer noch eine Null gesetzt, und die letzte Classe dadurch ergänzt werden. Die Rechnung selbst ist übrigens nach den im vorhergehenden gegebenen Regeln gemacht, und zwar bey der ersten Zahl so, als wäre aus 625450090, und bey der zweyten, als wäre aus 3600960064 die Quadratwurzel auszuziehn, da denn die Zahlen 25009 und 60008 herausgekommen sind. Endlich sind, weil die erste Zahl 3 Classen, und die zweyte 6 Classen mit Decimalbrüchen hat, der ersten gefundenen Wurzel 3, der andern 6 Decimalstellen gegeben worden, woraus die gesuchten Wurzeln 25,009 und 0,060008 entstanden sind.

Anmerk. 1) Wenn eine gegebene Zahl kein wirkliches Quadrat ist, so wird die Wurzel (in der oben angezeigten Bedeutung) dadurch genauer gefunden, daß der gegebenen Zahl mehrere Nullen für die Stellen der Decimalbrüche angehängt werden, und sodann die Rechnung weiter fortgesetzt wird, wie aus nachfolgenden Beyspielen, wo aus den Zahlen 2 und 6563 die Quadratwurzel durch Näherung ausgezogen ist, erhellt.

2,	00	00	00	1,414...
1	..	..	..	
100	..	..		
(24)	..	..		
96	..	..		
400	..			
(281)	..			
281	..			
11900				
(2824)				
11296				
604				

65	63,	00	00	00	81,012...
64	..	..	..	..	
163	..	..	..		
(161)	..	..	..		
161	..	..	..		
20000	..				
(16201)	..				
16201	..				
379900					
(162022)					
324044					
55856					

D. i. das Quadrat von 1,414 ist nur um 604 Millionentheile von der Zahl 2, und das Quadrat von 81,012 ist um 55856 Millionentheile von der Zahl 6563 verschieden. Wenn die Rechnung weiter fortgesetzt wird; so findet man die Wurzeln, deren Quadrate den gegebenen Zahlen nahe kommen, immer genauer, so daß endlich Reste übrig bleiben, die so unbeträchtlich sind, daß sie für nichts angesehn werden können. Die Rechnung geht aber nie völlig auf.

2) Dergleichen Zahlen, welche nicht genau durch Ziffern ausgedrückt werden können, werden Irrationalzahlen, die übrigen Rationalzahlen genannt. Z. B. Die Quadratwurzeln aus 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. w. sind Irrationalzahlen, weil sie nicht genau durch Ziffern ausgedrückt werden können.

3) Die Quadratwurzel aus einem gemeinen Bruch wird gefunden, entweder, wenn man, nachdem derselbe durch die möglichst kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzeln auszieht, da denn ein Bruch, dessen Zähler die Quadratwurzel aus dem Zähler, und dessen Nenner die Quadratwurzel aus dem Nenner des gegebenen Bruchs ist, die gesuchte Wurzel ist; oder, wenn man ihn zuvörderst in einen Decimalbruch verwandelt, und aus diesem hierauf die Quadratwurzel auszieht. Die erste Art der Rechnung ist nur alsdenn bequem, wenn die durch die Aufhebung des Bruchs herausgebrachten Glieder wirklich Quadratzahlen sind. Z. B. Um aus dem Bruch $\frac{2}{9}$, die Quadratwurzel auszuziehen, wird er zuvörderst durch 7 aufgehoben, da denn $\frac{4}{9}$ herauskommt. Da nun die Quadratwurzel des Zählers dieses Bruchs 2 und des Nenners 3 ist, so ist $\frac{2}{3}$ die gesuchte Quadratwurzel von $\frac{4}{9}$ oder $\frac{2}{9}\frac{8}{3}$. Sollte auf eben diese Art aus $\frac{7}{8}$ die Quadratwurzel ausgezogen werden; so würde, weil die Wurzeln beyder Glieder des Bruch irrational sind, ein Bruch herauskommen, dessen

sen Zähler und Nenner Decimalbrüche wären, welches ein gebrochener Bruch seyn würde. Daher ist es bequemer aus 0,875 die Quadratwurzel auszuziehn, indem dieser Bruch soviel als $\frac{7}{8}$ gilt.

32. Wie wird eine Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl ausgezogen?

Erster Fall. Wenn die gegebene Zahl keine Decimalbrüche hat.

1) Es wird die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen abgetheilt, deren jede drey Ziffern enthält, doch kann die äußerste oder erste Classe zur Linken auch zwey oder nur eine haben.

Z. B. Es soll aus den Zahlen 13824 und 2299968 die Cubicwurzel gezogen werden, so erhält die erste dieser gegebenen Zahlen, wie aus der weiter unten befindlichen Rechnung zu ersehn ist, 2 Classen, davon die äußerste nur 2, die andere 3 Classen, davon die äußerste nur eine Ziffer hat.

2) Wird in der obigen Wurzeltafel eine Cubiczahl gesucht, die so groß, oder nächst kleiner ist als die erste Classe. Die Wurzel dieser Zahl ist **der erste Theil** der gesuchten **Cubicwurzel.**

Die Zahl 13 der ersten Classe der ersten gegebenen Zahl fällt zwischen 8 und 27, es ist also 8 der nächst kleinere Cubus, und die Wurzel desselben 2 ist der erste Theil der gesuchten Wurzel, welche hinter den Strich der letzten Classe zur Rechten geschrieben wird.

3) Wird der Cubus des gefundenen ersten Theils der Cubicwurzel von der ersten Classe abgezogen, und neben den Rest der ersten Classe die zweyte Classe geschrieben.

Der Cubus 8 von 2 läßt, von 13 abgezogen, zum Rest 5; neben dieser 5 steht die zweyte Classe, also 5824.

4) Wird der gefundene erste Theil der Wurzel mit sich selbst multiplicirt, oder daraus ein Quadrat gemacht, und dieses mit drey multiplicirt, dieses dreyfache

fache Quadrat aber unter den Rest und die dabeystehende zweyte Classe so geschrieben, daß die letzte Ziffer dieses dreyfachen Quadrats unter die erste Ziffer der zweyten Classe komme.

Das Quadrat des ersten Theils der Wurzel 2 ist 4, und 3 mal 4 ist 12, welche 12 unter 5824 also geschrieben wird, daß die 2 unter die erste Zahl der neuen Classe, nemlich unter die 8, kommt. Sie ist in eine Parenthese geschlossen, weil die folgenden Posten addirt werden, diese aber nicht, wobey sonst, ohne eine Auszeichnung dieser Zahl, leicht ein Irthum vorfallen könnte.

5) Wird mit diesem dreyfachen Quadrat in die darüber stehenden Zahlen dividirt, wobey zu merken, daß bey einer grösseren Cubiczahl um der folgenden dazu kommenden Posten willen öfters ein kleinerer Quotient genommen werden muß, als bey einer gewöhnlichen Division geschehn dürfte. Der Quotient ist der zweyte Theil der Wurzel.

12 wird in 58 dividirt, der Quotient 4 ist der zweyte Theil der Wurzel, welcher neben den ersten Theil 2 gesetzt wird.

6) Wird mit diesem zweyten Theil der Wurzel das dreyfache Quadrat multiplicirt, und das Product unter dasselbe geschrieben.

4 mal 12 ist 48, welche 48 gerade unter die 12 gesetzt wird.

7) Wird der zweyte Theil der Wurzel mit sich selbst multiplicirt oder daraus ein Quadrat gemacht, dieses Quadrat mit dem ersten Theil der Wurzel und dieses Product wieder mit drey multiplicirt, dieses letzte Product aber unter das vorige nach Nr. 6. gefundene Product so gesetzt, daß die letzte Ziffer unter die zweyte Ziffer der zweyten Classe komme.

Das Quadrat 16 von 4, mit 2 multiplicirt, giebt zum Product 32, und 3 mal 32 ist 96, welche 96 unter die 48 so gesetzt wird, daß die 6 in die Stelle vor der 8, oder gerade unter die 2 der zweyten Classe kommt.

8) Wird

8) Wird von dem zweyten Theil der Wurzel der Cubus gemacht, und dieser unter die beyden vorigen Producte so gesetzt, daß die letzte Ziffer unter die dritte Ziffer der zweyten Classe komme.

Der Cubus von 4 ist 64, deren letzte Ziffer 4 wieder in die unmittelbar niedrigere Stelle gerade unter die 4 der zweyten Classe gesetzt wird.

9) Werden diese drey unter einander geschriebenen Zahlen in eine Summe gebracht.

Die Summe ist hier 5824.

10) Wird diese Summe von dem Rest der ersten Classe und der daneben gesetzten zweyten Classe subtrahirt, und neben den Rest der zweyten Classe die dritte geschrieben.

Bey der Subtraction der Summe 5824 von der obern Zahl 5824 bleibt zum Rest 0, und da keine Classe mehr hinzuzusetzen übrig ist, so ist die gesuchte Cubicwurzel der gegebenen Zahl gefunden, nemlich 24. In dem andern Beyspiel aber, in welchem nach den vorigen Regeln die beyden ersten Theile der Wurzel 1 und 3 gefunden worden, ist der Rest 102, zu welchem die dritte Classe 968 gesetzt wird, also 102968.

11) Wird aus den gefundenen beyden ersten Theilen der Wurzel ein Quadrat gemacht, und dieses mit drey multiplicirt, dieses dreyfache Quadrat aber unter den Rest der zweyten und die dabey stehende dritte Classe so, wie vorhin bey der vierten Regel gezeigt worden, geschrieben, und nachher mit dieser dritten und den folgenden Classen eben so, wie mit der zweyten, verfahren, bis alle Theile der Wurzeln gefunden worden, welche ebenfalls aus soviel Ziffern bestehen muß, als die gegebene Zahl Classen hat.

So ist in dem zweyten unten berechneten Beyspiel die Zahl 507 entstanden, indem man von 13, den beyden ersten Theilen der Wurzel das Quadrat genommen, und dieses (nach Nr. 4) mit 3 multiplicirt ist. Mit 507 ist darauf (nach Nr. 5) in 1029, oder mit 5 in 10 dividirt, und der Quotient 2 neben

die

die 13, hinter den Strich gesetzt worden. Hierauf ist 507 (nach Nr. 6.) mit dem gefundenen Quotienten 2 multiplicirt, woraus das darunter stehende Product 1014 entstanden ist. Ferner ist (nach Nr. 7.) das Quadrat 4 des gefundenen dritten Theils der Wurzel 2 mit den ersten Theilen 13 multiplicirt, und dieses Product 3 mal genommen, woraus die Zahl 156 entstanden, deren niedrigste Ziffer 6 wieder um eine Stelle zur Rechten vorgerückt ist. Endlich ist (nach Nr. 8 bis 10.) der Cubus 8 von 2 hinzugesetzt, die Summe aller Posten 102968 gefunden, und diese von dem unter dem vorhergehenden Strich gesetzten Rest und der dritten Classe abgezogen worden. Der Rest ist 0, und da keine neue Classe hinzuzusetzen übrig ist, so ist 132 die gesuchte Cubikwurzel. Wäre noch eine Classe übrig, so würde nunmehro mit 132, wie vorher mit 13, nach den Regeln in Nr. 4 bis Nr. 10. verfahren.

13	324	24
8	...	
5834		
(12)..		
48 ..		
96.		
64		
5824		
0		

2	399	968	132
1	...	...	
1399			
(3).....			
9			
27			
27 ...			
1197 ...			
102968			
(507)..			
1014 ..			
156.			
8			
102968			
0			

Anmerk. 1) Die Ursache, warum die nach Nr. 9. zu summirenden Producte nicht, wie bey der Addition gewöhnlich ist, gerade unter einander gesetzt werden, sondern jedes um eine Stelle weiter vorgerückt wird, ist, daß die Theile der Wurzel, mit denen man der Kürze wegen als mit Einern rechnet, eigentlich Einheiten höherer Ordnungen sind, und zwar ist jeder vorhergehende Theil allemal in Absicht des unmittelbar darauf folgenden als ein Zehner anzusehn. Z. B. In dem ersten Beyspiel bedeutet der erste Theil der Wurzel eigentlich 20, daher der Divisor eigentlich 1200, das erste Product 4800 und das zweyte 960 ist. Die Nul-

len werden, weil in der Rechnung dadurch nichts geändert wird, und eine jede Zahl dennoch ihre gehörige Stelle bekommt, wenn die gegebenen Regeln beobachtet werden, weggelassen.

2) Wenn ein Dividendus von Nr. 5. für den nach Nr. 4. gefundenen Divisor zu klein ist, so wird zu dem vorhergefundenen Theil der Wurzel eine 0, zu der vorhergenommenen Classe aber die nächstfolgende gesetzt, und alsdenn nach Nr. 11. die Rechnung vollendet. Z. B. Es soll aus 8246498 die Cubikwurzel gezogen werden, so ist die Rechnung folgende:

8	246	498	202
8	...	...	

246498
(1200)..
2400..
240.
8

242408

4090

3) Wenn nach vollendeter Rechnung ein Rest bleibt; so ist die gegebene Zahl keine vollkommne Cubikzahl, und der Rest zeigt an, um wieviel sie größer sey, als der Würfel der gefundenen Wurzel. Z. B. Der Rest 4090 bey dem Beyspiel der zweyten Anmerkung zeigt an, daß die Zahl 8246498 um 4090 größer sey, als der Würfel von 202. Die Cubikwurzel aus einer solchen Zahl, welche kein vollkommener Cubus ist, auszieht, heißt daher nur, diejenige Zahl finden, deren Cubus der gegebenen Zahl nahe kommt.

Zweyter Fall. Wenn die gegebene Zahl Decimalbrüche enthält.

1) Es wird zuvörderst die gegebene Zahl, so wie bey ganzen Zahlen gelehrt ist, in ihre Classen abgetheilet, wobey jedoch zu merken, daß man diese Abtheilung nicht von der niedrigsten Ziffer, sondern von der Stelle des Comma anfangen, und wo es nöthig ist, auf beyden Seiten desselben fortsetzen, auch, wenn die niedrigste Classe der Decimalbrüche nicht drey Ziffern enthält, soviel Nullen hinzusetzen müsse, als

als nöthig sind, um die fehlenden Stellen zu ergänzen.

2) Hierauf wird die Rechnung genau nach denselben Regeln, die bey ganzen Zahlen gegeben sind, gemacht, ohne während der Rechnung auf den Werth der Ziffern zu sehn; nach vollendeter Rechnung aber giebt man der gefundenen Wurzel so viel Decimalstellen, als die gegebene Zahl Classen für Decimalbrüche hat. Die also berichtigte Wurzel ist die gesuchte.

Z. B. Es sollen aus den Zahlen 10691,6196 und 0,000008254655 27 die Cubikwurzeln ausgezogen werden; so ist die Rechnung folgende:

I.

10	691,	619	600	22,03	0,	000	008
8	...	...	...				8

2691	
(12)	
24	
24	
8	
2648	
43619600	
(145200)..	
435600..	
5940.	
27	
43619427	
173.	

II.

254	655	270	0,020218
...	...	...	

254655...	
(1200).....	
2400.....	
240.....	
8...	
242408...	
12247270	
(122412)..	
122412...	
606.	
1	
12247261	
9	

Beyde gegebene Zahlen sind hier zwörderst in Classen getheilt, und es ist der Anfang der Abtheilung bey der Stelle des Comma gemacht worden. Es würden beyde Zahlen unrichtig folgendergestalt getheilt worden seyn 106 | 91,6 | 196 und 0,00 | 000 | 825 | 465 | 527. Da ferner die niedrigste Classe bey dem ersten Beyspiel nur eine, und bey dem zweyten nur zwey Ziffern erhält; so sind in jenem noch zwey, und in diesem noch eine Null hinzugefügt worden, um die fehlenden Stellen zu ergänzen. Hierauf ist die Rechnung genau so gemacht worden, als wäre

anstatt der ersten Zahl die folgende: 10691619600, und anstatt der zweyten die folgende: 8254655270 gegeben. Bey der ersten kommt 2203 und bey der zweyten 2021 zur Cubikwurzel. Da nun die gegebene erste Zahl 2, und die zweyte 5 Classen für Decimalbrüche hat; so hat auch die gefundene Wurzel bey der ersten Zahl 2, bey der zweyten 5 Decimalstellen erhalten, wodurch die gesuchten Wurzeln 22,03 und 0,02021 gefunden sind.

Anmerk. Man findet die Cubikwurzel einer gegebenen Zahl, welche kein vollständiger Würfel ist, durch Näherung, so wie auch die Cubikwurzel aus einem gegebenen Bruch, auf eine ähnliche Art, wie im Vorhergehenden bey den Regeln der Ausziehung der Quadratwurzel gezeigt ist.

Von den Verhältnissen und Proportionen vornehmlich bey Zahlen.

33. Was ist die Verhältniß zweyer Zahlen?

Die Größe einer Zahl in Vergleichung mit der Größe einer andern heißt die **Verhältniß** derselben gegen diese. Die Größe jener Zahl aus der Größe dieser bestimmen, heißt die **Verhältniß** jener Zahl zu dieser finden.

Z. B. Wenn man sagt: 12 ist viermal so groß als 3, und 3, ist viermal kleiner als 12; oder auch, wenn man sagt 12 ist um 9 größer als 3, und 3 ist um 9 kleiner als 12; so zeigt man auf eine doppelte Art die Verhältniß der Zahl 12 zu der Zahl 3, und der Zahl 3 zu der Zahl 12 an. In beyden Fällen wird nemlich die Größe angezeigt, welche die eine Zahl gegen die andere hat, und es wird aus der Größe der einen die Größe der andern bestimmt.

34. * Wie werden die Verhältnisse eingetheilt?

In **arithmetische** und **geometrische** Verhältnisse. Eine **arithmetische** Verhältniß entsteht, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen darauf sieht, **um wieviel** die eine größer oder kleiner ist als die andere, folglich wenn man durch die **Subtraction** der einen von der andern untersucht, um wieviel sie

von

von einander unterschieden sind. Eine **geometrische** Verhältniß entsteht, wenn man bey Vergleichung zweyer Zahlen darauf sieht, **wie vielmal** die eine größer oder kleiner ist als die andere, folglich wenn man durch die **Division** der einen in die andere untersucht, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist.

Z. B. Wenn man sagt: 12 ist um 9 größer als 3, so bestimmt man die arithmetische; wenn man sagt: 12 ist viermal größer als 3; so bestimmt man die geometrische Verhältniß der Zahl 12 zu der Zahl 3. Jenes geschieht durch die Subtraction der 3 von 12, dieses durch die Division der 3 in 12.

Anmerk. 1) Daher werden die Zeichen der Subtraction und Division auch zur Bezeichnung der Verhältnisse gebraucht, und z. B. der Ausdruck 12 — 3 zeigt die arithmetische, der Ausdruck 12 : 3 aber die geometrische Verhältniß der 12 zur 3 an. Eben so bedeutet 3 — 12 die arithmetische, und 3 : 12 die geometrische Verhältniß der 3 zur 12. Jene wird bestimmt, indem man sagt, 3 ist um 9 kleiner als 12; diese, indem man sagt, 3 ist viermal kleiner als 12.

2) In den Ausdrückungen der Verhältnisse durch ihre Zeichen, welche gleichfalls schlechthin Verhältnisse genannt werden, heißen die darin genannten Größen Glieder der Verhältniß. Das erste Glied, welches diejenige Zahl ist, deren Verhältniß zu der andern bestimmt werden soll, wird das vorhergehende, das andere, aus welchem die Größe des erstern bestimmt werden soll, das nachfolgende Glied der Verhältniß genannt. Z. B. Der Ausdruck 3 : 12 wird auch schlechthin eine Verhältniß genannt, 3 und 12 sind die Glieder dieser Verhältniß, und zwar ist 3 das vorhergehende und 12 das nachfolgende. Eine Verhältniß heißt steigend, wenn das vorhergehende Glied kleiner, fallend aber, wenn dasselbe größer ist, als das nachfolgende.

3) Ueberhaupt findet bey jeden zwey Größen von einerley Art eine Verhältniß statt. Z. B. Wenn man sagt, es sey ein gewisser Thurm dreymal so hoch, als ein gewisses Haus, so bestimmt man die Verhältniß der Höhen des Thurms und des Hauses. Wenn man sagt, die Luft sey 860 mal leichter als das Wasser; so bestimmt man die Verhältniß der Gewichte der Luft und einer gleich großen Menge Wassers. Wenn man sagt, ein Bote gehe dreymal geschwinder

als ein anderer; so bestimmt man die Verhältniß der Geschwindigkeiten der Boten, und dergl. Eine jede Ausmessung einer Größe durch ihr Maaß ist eine Bestimmung der Verhältniß derselben zu ihrem Maaß. Z. B. Wenn man sagt, daß eine gewisse Länge 6 Ellen betrage, so bestimmt man dadurch ihre Verhältniß zu der Länge einer Elle. Wenn man sagt, daß eine gewisse Summe Geldes $5\frac{1}{3}$ rthlr betrage, so bestimmt man die Verhältniß der Größe dieser Summe zu einem Thaler, welcher das Maaß derselben ist. Umgekehrt ist auch die Bestimmung der Verhältniß einer Größe zu einer jeden andern nichts anders, als eine Ausmessung derselben durch diese andere, welche letztere daher als ein Maaß der erstern anzusehen ist. Daher wird auch vorzüglich die geometrische Verhältniß zweyer Größen überhaupt dadurch bestimmt, daß man das nachfolgende Glied in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile theilt, und untersucht, wieviel solcher gleichen Theile in dem vorhergehenden Gliede enthalten sind.

4) Da eine jede Größe, wenn es anders möglich ist, ein Maaß für dieselbe anzunehmen, gemessen, folglich auch durch eine Zahl ausgedruckt werden kann, welche anzeigt, wie oft das Maaß, oder gleiche Theile desselben, in der Größe enthalten sind; so kann auch die Verhältniß jeder zweyer Größen durch die Verhältniß zweyer Zahlen bestimmt werden. Daher ist, zumal in der Arithmetik, vornehmlich von den Verhältnissen der Zahlen die Rede, und diese werden auch im folgenden vornehmlich betrachtet werden. Wenn aber die Verhältniß zweyer Zahlen die Verhältniß zweyer Größen ausdrucken soll, so müssen sie sich auf einerley Einheit beziehn, wenn man sie als unbenannt ansehn will. Z. B. Wenn man weiß, daß ein Körper 12 Centner, und ein anderer 3 Centner wiegt; so verhalten sich die Gewichte dieser Körper, wie die Zahlen 12 und 3. Wenn aber der eine Körper 12 Centner und der andere 3 Pfund wiegt, so verhalten sich die Gewichte nicht, wie 12 zu 3, welches, wenn die geometrische Verhältniß gemeynt ist, anzeigen würde, daß der eine Körper nur ein viermal größeres Gewicht hätte, als der andere; sondern weil 12 Centner soviel als 1320 Pfund sind, so wird die Verhältniß der Gewichte durch die Verhältniß 1320 : 3 bestimmt.

5) Bey der arithmetischen Verhältniß heißt die Zahl, welche anzeigt, wieviel zu dem vorhergehenden Gliede addirt oder von demselben subtrahirt werden müsse, um das nachfolgende herauszubringen, die Differenz, weil sie durch die Subtraction gefunden ist. Diese Differenz bekommt daher das Zeichen +, wenn die Verhältniß steigend, und —, wenn sie fallend ist. Z. B. Der Verhältniß 2—6 Differenz ist + 4, der Verhältniß 6—2 Differenz ist — 4. Das Zeichen + wird gewöhnlich weggelassen. Die Differenz zeigt

zeigt also an, um wieviel das zweyte Glied größer oder kleiner als das erste ist. Bey der geometrischen Verhältniß heißt der Quotient, welcher herauskommt, wenn das vorhergehende Glied in das nachfolgende dividirt wird, der Exponent. Er zeigt an, wie vielmal das zweyte Glied der Verhältniß größer oder kleiner ist, als das erste. Z. B. Bey der Verhältniß 3 : 12 ist der Exponent 4, bey 12 : 3 ist er $1\frac{3}{7}$ oder $\frac{1}{4}$.

35. Welches sind die vornehmsten Eigenschaften der Verhältnisse?

1) Arithmetischen **Verhältnisse** sind einander **gleich**, wenn die Differenzen mit ihren Zeichen; geometrische, wenn die Exponenten derselben einander gleich sind.

Z. B. Die arithmetischen Verhältnisse 6 — 9 und 15 — 18 sind gleich, weil in beyden die Differenz 3 ist, folglich beyde vorhergehende Glieder um gleichviel, nemlich um 3, kleiner sind, als die nachfolgenden. Eben so sind die arithmetischen Verhältnisse 12 — 9 und 24 — 21 gleich, weil in beyden die Differenz — 3 ist. Die Verhältnisse 15 — 18 und 24 — 21 sind aber ungleich, weil in jener die Differenz + 3 in dieser — 3 ist. Die geometrischen Verhältnisse 3 : 15 und 5 : 25 sind gleich, weil in beyden der Exponent 5 ist, folglich die vorhergehenden Glieder beyder Verhältnisse gleich vielmal, nemlich fünfmal kleiner sind, als die nachfolgenden. Eben so sind die Verhältnisse 37 : 7 und 20 : 4 gleich; der Exponent ist in beyden $\frac{1}{7}$, und die vorhergehenden Glieder sind also in beyden gleich vielmal, nemlich fünfmal, größer als die nachfolgenden.

Anmerk. 1) Verhältnisse können gleich seyn, wenn gleich die Größen der einen mit den Größen der andern nicht von einerley Art sind. Z. B. Zwey Wege können sich gegen einander verhalten, wie Zeiten; die Preise der Waaren, wie deren Gewichte u. s. w.

2) Wenn zwey Verhältnisse einer dritten gleich sind, so sind sie auch selbst einander gleich.

3) Eine Verhältniß umkehren, heißt, das erste Glied derselben zum zweyten und das zweyte zum ersten machen. Die Verhältniß 2 : 3 wird 3 : 2, wenn sie umgekehrt werden soll. Zwey Größen verhalten sich verkehrt oder umgekehrt, wie zwey andere, heißt: Die Verhältniß zweyer Größen wird

der Verhältniß zweyer andern gleich, wenn diese umgekehrt wird. Z. B. Die Zeiten, in welchen eine gewisse Arbeit vollendet wird, verhalten sich verkehrt, wie die Zahl der Arbeiter. Wenn 10 Arbeiter eine gewisse Arbeit in 5 Tagen vollenden; so werden 5 Arbeiter eben diese Arbeit, bey gleicher Anstrengung, nur in 10 Tagen vollenden können. Hier ist die Verhältniß der Arbeiter 10:5, die Verhältniß der Zeiten, in welchen sie die Arbeit vollenden, ist 5:10. Beyde Verhältnisse werden einander gleich, wenn eine von beyden umgekehrt wird.

4) Je mehr die Glieder einer Verhältniß in Ansehung ihrer Größe von einander verschieden sind, desto größer wird die Verhältniß genannt. Z. B. Die Zahlen 1 und 100 haben eine größere Verhältniß gegen einander, als 1 und 2.

2) Wenn die Glieder einer arithmetischen Verhältniß um gleichviel, oder die Glieder einer geometrischen Verhältniß gleichvielmal größer oder kleiner gemacht werden; so wird die Verhältniß derselben dadurch nicht geändert.

Z. B. Wenn einerley Zahl, als 6 zu den Gliedern der Verhältniß 9—16 addirt, oder von denselben subtrahirt wird, so sind die Verhältnisse der Summen 15—22; und der Differenzen 3—10 der Verhältniß 9—16 gleich. Wenn ferner die Zahlen der Verhältniß 18:6 beyde mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, wie in folgenden Reihen

18:6 36:12 54:18 72:24 180:60 1800:600

18:6 9:3 6:2 $4\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}$ 3:1 1,8:0,6 : 1:$\frac{1}{3}$ ꝛc.

geschehn ist, wo die Glieder der Verhältniß 18:6 nach einander in der ersten Reihe mit 2, 3, 4, 10, 100 multiplicirt, in der zweyten aber mit 2, 3, 4, 6, 10, 18 dividirt sind; so ist jede der dadurch entstandenen Verhältnisse der Verhältniß 18:6 gleich.

Anmerk. 1) Wenn nemlich eine Größe z. B. dreymal größer als eine andere ist, so muß ihr Zweyfaches, Dreyfaches, Vierfaches ꝛc. auch dreymal größer seyn, als das Zwey- Drey- Vierfache ꝛc. der andern. Eben so muß auch ihre Hälfte, Drittel, Viertel ꝛc. dreymal größer seyn, als Hälfte, Drittel, Viertel ꝛc. der andern Größe.

2) Daher kann eine jede Verhältniß durch unzählich viele andere ausgedrückt werden. Insonderheit kann zur Bequemlichkeit der Rechnung eine jede Verhältniß in eine andere verwandelt werden, deren vorhergehendes oder nachfolgendes

des Glied 1 ist, je nachdem man die Glieder derselben durch das vorhergehende oder nachfolgende Glied dividirt. Z. B. Aus 18 : 6 wird 1 : $\frac{1}{3}$ wenn mit 18, und 3 : 1 wenn mit 6 dividirt wird. Auch kann auf diese Art eine jede Verhältniß, in welcher eins oder beyde Glieder Brüche sind, in eine andere verwandelt werden, deren Glieder ganze Zahlen sind, oder nur Decimalbrüche enthalten. Z. B. Aus der Verhältniß $2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5}$ wird 35 : 63, wenn beyde Glieder zuerst mit 3 und was herauskommt, wieder mit 5, oder wenn sie sogleich mit 15 multiplicirt werden. Die Verhältniß 35 : 63 wird wieder in 1 : 1,8 verwandelt, wenn beyde Glieder mit 35 dividirt werden. Wenn gleich bey einer solchen Verwandlung einer Verhältniß in eine andere, deren erstes Glied 1 ist, das zweyte Glied solche Decimalbrüche erhält, bey welchen die Rechnung nicht genau aufgeht; so bedient man sich doch auch solcher Verhältnisse zur Bequemlichkeit der Rechnung, weil der Fehler, den man durch Weglassung der fehlenden Ziffern begeht, unbeträchtlich gemacht werden kann. So wird z. B. die Verhältniß 1 : $\frac{7}{11}$ der Verhältniß 1 : 0,6363636... gleich gesetzt, und zwar werden mehr oder weniger Ziffern aus den Decimalstellen beybehalten, je nachdem eine größere Genauigkeit nöthig oder überflüßig ist.

3) Um eine Verhältniß durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, wird der gemeinschaftliche Divisor der Glieder derselben, wie bey den Brüchen, gesucht.

4) Verhältnisse heißen rational oder irrational, je nachdem ihre Glieder entweder beyde Rationalzahlen sind oder nicht. Z. B. $\sqrt{3} : 5$ und $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ sind irrationale Verhältnisse. Jene kann auch durch 1,7320508... : 5, diese durch 1,7320508... : 1,41421356.... ausgedruckt werden, indem diese Zahlen die durch Näherung gefundenen Quadratwurzeln der Zahlen 3 und 2 sind. Die Exponenten und Differenzen solcher Verhältnisse sind ebenfalls irrational. Die irrationalen Verhältnisse werden, in sofern jede Irrationalzahl durch Fortsetzung der Rechnung so genau gefunden werden kann, daß der Fehler, der durch Weglassung der fehlenden Ziffern begangen wird, verschwindet, für rationale Verhältnisse angesehen.

36. *Was ist eine Proportion, und welches sind die vornehmsten verschiedenen Arten derselben?

Eine Gleichheit zweyer Verhältnisse, heißt eine **Proportion**, und zwar ist die Proportion **arithmetisch**, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetisch, **geometrisch**, wenn die gleichen Verhältnisse geometrisch sind.

Anmerk. 1) Der Ausdruck der Proportionen geschiehe durch das Zeichen der Gleichheit. Z. B. Die Ausdrücke 2—6=5—9 oder 2:6=5:15 zeigen an, daß die arithmetischen Verhältnisse 2—6 und 5—9, und die geometrischen Verhältnisse 2:6 und 5:15 einander gleich sind, und daß daher die Zahlen 2 6 5 9 in der Ordnung, in welcher sie genannt werden, in einer arithmetischen, die Zahlen 2 6 5 15 aber, gleichfalls in der Ordnung, in welcher sie genannt werden, in einer geometrischen Proportion stehn. Diese Ausdrücke der Proportionen werden auch selbst schlechthin Proportionen genannt, und die Proportion 2—6=5—9 wird kurz folgendergestalt gelesen: 2 verhält sich arithmetisch zu 6, wie 5 zu 9; die Proportion 2:6=5:15 aber folgendergestalt: 2 verhält sich geometrisch zu 6, wie 5 zu 15. Indessen wird das Beywort geometrisch bey den Verhältnissen und Proportionen gewöhnlich weggelassen, und es ist allemal eine geometrische Verhältniß oder Proportion zu verstehn, wenn sie ohne Beywort genannt wird.

2) Eine Proportion kann bey allen Größen statt finden, bey welchen Verhältnisse statt finden, auch dürfen nach dem Vorhergehenden, die Glieder der einen Verhältniß mit den Gliedern der andern nicht von einerley Art seyn. Ob überhaupt 4 Größen in Proportion stehen oder proportionirt sind, d. i. ob zwey Verhältnisse von zwey Paar Größen gleich sind, findet man, wenn man die nachfolgenden Glieder beyder Verhältnisse willkührlich, jedoch in gleichviele gleiche Theile theilt, und untersucht, ob die vorhergehenden Glieder gleichviel solcher Theile enthalten, als ihre nachfolgenden erhalten haben. Z. B. Die vier Linien A, B, C, D (Tab. 5 Fig. 1) sind in der hier benannten Ordnung proportionirt, oder es ist A:B=C:D; denn es sind B und D in gleichviele, nemlich in 6, gleiche Theile getheilt, und es findet sich, daß auf die Linie A 5 solcher Theile gehn, deren die Linie B 6 hat und auf die Linie C eben so viele, nemlich 5, solcher Theile, deren die Linie D 6 hat. Bestünde A nicht aus eben so vielen Theilen der B als C aus Theilen der D besteht, so würde keine Proportion unter den 4 Größern A, B, C, D statt finden. In der Folge wird vornehmlich von Proportionen der Zahlen geredet werden.

3) In einer jeden Proportion werden die Glieder, nach ihrer Stelle, die erste, zweyte, dritte, vierte Proportionalzahl, oder Proportionalgröße, überdem das erste und vierte Glied äußere, das zweyte und dritte mittlere Glieder der Proportion genannt. Sind die mittleren Glieder gleich, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend; das mittlere Glied heißt alsdenn die mittlere Proportionalzahl oder Proportionalgröße zwischen den äußern. Z. B. In der Proportion 2:4=3:6 ist 2 die erste, 4 die zweyte, 3 die dritte, 6 die vierte Proportionalzahl;

2 und

2 und 6 sind äußere, 4 und 3 aber mittlere Glieder. Die Proportionen 2:4=4:8, und 2—4=4—6 sind stetig, und die mittlere Proportionalzahl in beyden ist 4.

37. Welches sind die allgemeinen Eigenschaften der Proportionen?

1) In **arithmetischen Proportionen** ist die Summe der äußern Glieder allemal der Summe der mittlern gleich.

Z. B. Wenn in der Proportion 2—3=5—6 die beyden äußern Glieder 2 und 6 addirt werden, so ist die Summe 8; eben dieselbe Zahl wird gefunden, wenn man die beyden mittlern Glieder 3 und 5 addirt.

Anmerk. 1) Folglich kann das vierte Glied in einer arithmetischen Proportion gefunden werden, wenn man die mittleren Glieder addirt, und von der Summe das erste Glied subtrahirt. Z. B. Wenn in der obigen Proportion das letzte Glied 6 unbekannt wäre, so kann man es finden, wenn man die mittlern Glieder 3 und 5 addirt, und von der Summe 8 das erste Glied 2 subtrahirt. Der Rest 6 giebt das gesuchte vierte Glied.

2) Es können die Glieder einer arithmetischen Proportion auf verschiedene Weise so versetzt werden, daß sie in der jedesmaligen Ordnung, in welche sie durch die Versetzung kommen, einander proportionirt bleiben, obgleich bey dieser Versetzung andere Differenzen entstehn können. Es sey die Proportion 2—3=5—6 gegeben, so kann

(1) Das zweyte Verhältniß zum ersten, und das erste zum zweyten gemacht werden, und es ist 5—6=2—3.

(2) Auch können die vorhergehenden Glieder zu nachfolgenden und die nachfolgenden zu vorhergehenden gemacht werden, und es ist

3—2=6—5
6—5=3—2.

Durch diese beyden Veränderungen kann ein jedes Glied der Proportion zum vierten Gliede gemacht, folglich nach der obigen Regel auch ein jedes Glied, wenn es unbekannt ist, aus den drey übrigen berechnet werden.

(3) Auch können die mittleren Glieder der Proportion versetzt werden, wenn sämmtliche Glieder unbenannte Zahlen oder überhaupt Größen von einerley Art sind, also ist z. B.

2—5=3—6
5—2=6—3 u. s. w.

3) Da

1) Da in einer ſtetigen Proportion die beyden mittlern Glieder einerley ſind, folglich jedes die Hälfte von der Summe der beyden äußern Glieder ſeyn muß, ſo kann die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen zwey gegebenen Zahlen gefunden werden, wenn man dieſelben addirt, und die Summe durch 2 dividirt. Z. B. Es ſoll die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen 3 und 9 gefunden werden, ſo werden dieſe beyden Zahlen addirt, und die Summe 12 durch 2 dividirt, der Quotient 6 iſt die geſuchte mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen 3 und 9, denn 3 verhält ſich zu 6 wie 6 zu 9. Es ſoll ferner die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen den Zahlen 6,7234572 . . . . und 4,8216723 gefunden werden; ſo iſt die Rechnung folgende:

6,7234572 . . .
4,8216723 . . .

11,5451295 . . .

2)

5,7725647 . . . mittl. arith. P. Zahl.

4) Zwiſchen mehreren Zahlen wird ein arithmetiſches Mittel, oder, wie man zu reden pflegt, ein Durchſchnitt gefunden, wenn man alle gegebene Zahlen addirt, und die Summe durch die Anzahl dieſer Zahlen dividirt. Z. B. Es hat jemand ein Stück Landes, welches ihm in dem erſten Jahre, darin er es gebauet hat, 50 Winſpel Korn eingebracht hat, im andern Jahre 42, im dritten 54, im vierten 48, im fünften 70, im ſechsten 38, im ſiebenten 56, im achten 60, im neunten 45, im zehnten 62. Nun will er gerne durch einen aus dieſen 10 Jahren genommenen Durchſchnitt wiſſen, wieviel daſſelbe Feld jährlich bringe, um den Werth deſſelben daraus beſtimmen zu können, daher werden die angezeigten 10 Zahlen in eine Summe gebracht, dieſe Summe, welche 525 beträgt, wird durch 10 dividirt, der Quotient $52\frac{1}{2}$ zeigt an, wieviel Winſpel das Feld bey gleicher Bearbeitung und Abwartung ohngefähr jährlich trage. Eben ſo kann man finden, wie viele Menſchen an einem Orte ohngefähr gebohren werden und ſterben, wenn man aus den Zahlen der Gebohrnen und Geſtorbenen von mehreren Jahren einen Durchſchnitt nimmt, welcher allemal deſto zuverläßiger iſt, je größer die Anzahl der Jahre iſt, daraus derſelbe genommen worden.

2) In geometriſchen Proportionen iſt das Product aus den äußern Gliedern allemal dem Product aus den mittlern gleich.

Z. B. Wenn in der Proportion 2 : 6 = 3 : 9 das erſte Glied 2 mit dem letztern 9 multiplicirt wird, ſo iſt das Product 18.

Eben

Eben diese Zahl wird gefunden, wenn man die mittlern Glieder 6 und 3 multiplicirt.

Anmerk. 1) Folglich kann das vierte Glied einer geometrischen Proportion gefunden werden, wenn man die mittlern Glieder multiplicirt, und das Product durch das erste Glied dividirt. Z. B. Wenn in der obigen Proportion das vierte Glied 9 unbekannt wäre, so kann man es finden, wenn man die mittlern Glieder 6 und 3 multiplicirt, und das Product 18 durch das erste Glied 2 dividirt. Der Quotient 9 giebt das gesuchte vierte Glied.

2) Es können die Glieder einer geometrischen Proportion ebenfalls auf eben die Weise, wie vorher bey der arithmetischen Proportion gezeigt ist, so versetzt werden, daß sie in der jedesmaligen Ordnung, in welche sie durch diese Versetzung kommen, proportionirt bleiben, wenn gleich zuweilen andere Exponenten bey dieser Versetzung entstehen. Z. B. Da

$$2:6=3:9$$

so ist auch a) $3:9=2:6$

b) $6:2=9:3$

$9:3=6:2$

woraus wiederum erhellet, daß ein jedes Glied der Proportion zum vierten gemacht, und also nach der Regel der ersten Anmerkung aus den 3 übrigen gefunden werden könne, wenn es unbekannt ist. Endlich ist auch, wenn sämmtliche Glieder unbenannte Zahlen, oder überhaupt Größen von einerley Art sind

c) $2:3=6:9$

$3:2=9:6$ u. s. w.

3) Da in einer stetigen Proportion die mittlern Glieder einerley sind, folglich jedes ein Factor ist, welcher mit sich selbst multiplicirt ein Product giebt, so dem Product aus den äußern Gliedern gleich ist, so kann die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwey gegebenen Zahlen gefunden werden, wenn man diese mit einander multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel auszieht. Z. B. Es soll die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 2 und 32 gefunden werden, so werden diese beyden Zahlen mit einander multiplicirt, das Product ist 64. Da nun von 64 die Quadratwurzel 8 ist, so ist diese Zahl die gesuchte mittlere Proportionalzahl zwischen 2 und 32; denn 2 verhält sich zu 8 wie 8 zu 32. Es sey ferner die mittlere Proportionalzahl zwischen 1 und 10 zu finden, so wird 1 mit 10 multiplicirt, und aus dem Product 10 wird die Quadratwurzel $3{,}1622..$ durch Näherung gefunden, demnach ist $1:3{,}6122...=3{,}6122...:10$.

4) Wenn zwey Producte gleich sind, so sind ihre Factoren proportionirt, wenn die Factoren des einen Products zu mittlern, und die Factoren des andern Products zu äußern Gliedern einer Proportion gemacht werden. Z. B.

Da

Da $3 \times 4 = 2 \times 6$ so ist auch $3 : 2 = 6 : 4$, oder $3 : 6 = 2 : 4$ u. s. w. da $6 \times 4 = 24$; so ist $6 : 24 = 1 : 4$ indem 24 so viel als 24×1 ist. Wenn ferner zwey Brüche gleich sind, so sind ihre Glieder proportionirt, wenn die Zähler zu vorhergehenden oder nachfolgenden und die Nenner zu nachfolgenden, oder vorhergehenden Gliedern einer Proportion gemacht werden. Z. B. Da $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$; so ist auch $7 : 12 = 21 : 36$ und $12 : 7 = 36 : 21$. Umgekehrt folgt aus einer Proportion allemal die Gleichheit der Brüche, welche entstehn, wenn die vorhergehenden oder nachfolgenden Glieder zu Zählern und die nachfolgenden oder vorhergehenden Glieder zu Nennern gemacht werden. Z. B. Da $3 : 2 = 6 : 4$ so ist auch $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ und $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

5) Ob 4 Zahlen proportionirt sind, findet man, wenn man versucht, entweder ob das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern Glieder gleich ist, oder ob die Exponenten gleich sind.

6) Eine jede Proportion kann insonderheit noch auf folgende verschiedene Arten in andere richtige Proportionen verwandelt werden, die jedoch nicht durchgängig einerley Exponenten haben.

(1) Es können sowol die Glieder jeder Verhältniß, als auch die vorhergehenden und nachfolgenden Glieder mit einerley Zahl, und zwar jedes Paar mit einer andern Zahl, der Richtigkeit der Proportion unbeschadet, multiplicirt oder dividirt werden. Z. B. Aus der Proportion

$12 : 24 = 8 : 16$ entstehn folgende

$36 : 72 = 8 : 16$ wo die Glieder der ersten Verhältniß $12 : 24$ mit 3;

$12 : 24 = 32 : 64$ wo die Glieder der zweyten Verhältniß $8 : 16$ mit 4;

$60 : 24 = 40 : 16$ wo die vorhergehenden Glieder 12 und 8 mit 5;

$12 : 48 = 8 : 32$ wo die nachfolgenden Glieder 24 und 16 mit 2 multiplicirt sind.

Eben so ist

$4 : 8 = 8 : 16$ wo die Glieder der ersten Verhältniß der obigen Proportion mit 3;

$12 : 24 = 2 : 4$ wo die Glieder der zweyten Verhältniß mit 4;

$6 : 24 = 4 : 16$ wo die vorhergehenden Glieder mit 2;

$12 : 3 = 8 : 2$ wo die nachfolgenden Glieder mit 8;

$1 : 2 = \frac{2}{3} : 1\frac{1}{3}$ wo alle Glieder mit 12 dividirt sind.

Diese Art der Verwandlung einer Proportion giebt zugleich oft eine bequeme Probe ihrer Richtigkeit ab. Z. B. Ob die Proportion $15 : 36 = 45 : 108$ richtig sey, findet man leichter, wenn man die Glieder derselben zuvörderst durch die Division kleiner macht; wenn hier die vorhergehenden Glieder mit 15, und die nachfolgenden mit 6

divi-

dividirt werden, so kommt 1 : 6 = 3 : 18; welche Proportion sich leichter prüfen läßt.

(2) Anstatt der vorhergehenden oder nachfolgenden Glieder können die Summen, oder Differenzen der Glieder der Verhältnisse, zu welchen sie gehören, der Richtigkeit der Proportion unbeschadet, gesetzt werden. Auch sind die Verhältnisse dieser Summen der Glieder zu den Differenzen derselben gleich. Z. B. Aus der Proportion 8 : 6 = 12 : 9 entstehn folgende:

8 + 6 : 6 = 12 + 9 : 9 d. i. 14 : 6 = 21 : 9
8 : 8 + 6 = 12 : 12 + 9 d. i. 8 : 14 = 12 : 21
8 — 6 : 6 = 12 — 9 : 9 d. i. 2 : 6 = 3 : 9
8 : 8 — 6 = 12 : 12 — 9 d. i. 8 : 2 = 12 : 3
und endlich 8 + 6 : 8 — 6 = 12 + 9 : 12 — 9 d. i. 14 : 2 = 21 : 3.

(3) Anstatt eines der beyden Verhältnisse der Proportion kann die Verhältniß der Summe oder Differenz der vorhergehenden zu der Summe oder Differenz der nachfolgenden Glieder gesetzt werden, wenn alle Glieder unbenannte Zahlen sind, oder doch Größen von einerley Art bedeuten. Z. B. Aus der Proportion 8 : 6 = 12 : 9 entstehn nachfolgende:

8 + 12 : 6 + 9 = 12 : 9 d. i. 20 : 15 = 12 : 9
und 12 — 8 : 9 — 6 = 12 : 9 d. i. 4 : 3 = 12 : 9.
Eben dies gilt auch von mehreren gleichen Verhältnissen;

Z. B. Weil
2 : 3 = 4 : 6 = 8 : 12 = 10 : 15 = 14 : 21 so ist auch
(2 + 4 + 8 + 10 + 14) : (3 + 6 + 12 + 15 + 21) = 2 : 3
d. i. 38 : 57 = 2 : 3 wo das erste Glied der Summe aller vorhergehenden und das zweyte der Summe aller folgenden Glieder gleich ist. Auch können die Glieder einiger Verhältnisse anstatt addirt zu werden, subtrahirt werden.

6) Wenn die gleichnamigen Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen mit einander multiplicirt oder in einander dividirt werden, nemlich das erste Glied der einen Proportion durch das erste Glied der andern, das zweyte Glied der einen, durch das zweyte der andern u. s. w. so sind die Producte oder Quotienten in der Ordnung, in welcher sie herauskommen, wieder proportionirt.

Z. B. Da 12 : 18 = 16 : 24
und 4 : 9 = 8 : 18;
so ist auch
12 × 4 : 18 × 9 = 16 × 8 : 24 × 18 d. i. 48 : 162 = 128 : 432
und $\frac{12}{4} : \frac{18}{9} = \frac{16}{8} : \frac{24}{18}$ d. i. 3 : 2 = 2 : $1\frac{1}{3}$.

7) Wenn folglich vier Zahlen proportionirt sind, so sind auch ihre Quadrate, Würfel, und überhaupt, jede Potenzen derselben

selben von einerley Exponenten proportionirt, und eben dies gilt auch von den Quadratwurzeln, Cubikwurzeln u. s. w. der proportionirten Zahlen.

Z. B. Da $2 : 3 = 6 : 9$

so ist auch $2^2 : 3^2 = 6^2 : 9^2$ d. i. $4 : 9 = 36 : 81$

und $2^3 : 3^3 = 6^3 : 9^3$ d. i. $8 : 27 = 216 : 729$

u. s. w.

auch ist $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{6} : \sqrt{9}$

d. i. 1,41421356 . . . : 1,7320508 . . = 2,44948974 . . . : 3

wo irrationale Verhältnisse kommen, die nur beynahe richtig sind.

a) Je nachdem in einer Proportion das erste Glied größer oder kleiner als das zweyte oder demselben gleich ist, je nachdem muß auch das dritte Glied größer oder kleiner als das vierte, oder demselben gleich seyn.

Die Regel de Tri.

38. * Was ist die Regel de Tri?

Eine Vorschrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen, welche nebst einer vierten, die unbekannt ist, in einer geometrischen Proportion stehn, diese vierte unbekannte Zahl gefunden werden kann.

39. Worin besteht diese Vorschrift oder Regel?

a. **Ueberhaupt** besteht dieselbe darin, 1) daß man die drey gegebenen Zahlen, nebst der unbekannten in eine solche Proportion setze, daß das unbekannte Glied darin das vierte werde, daher man die Glieder der zuerst aufgesetzten Proportion, wenn es nöthig ist, nach dem Fr. 37. 2) Anmerk. 2. gegebenen Beyspiel versetzen muß; 2) daß man alsdenn die beyden mittleren Glieder dieser Proportion mit einander multiplicire, und das Product durch das erste Glied dividire.

b. **Insonderheit** ist dabey noch zu bemerken, 1) daß bey benannten Zahlen, welche hier gemeiniglich nur vorkommen, die Glieder der Verhältnisse, wenn sie

sich

sich auf mehrere oder verschiedene Einheiten beziehen, in die kleinsten Einheiten von einerley Benennung verwandelt, auch, wenn Brüche dabey sind, dieselben eingerichtet werden müssen.

Z. B. Wenn ein Glied aus Thalern, Groschen und Pfennigen besteht, so muß es erst in Pfennige verwandelt werden. Wenn in dem ersten Gliede Pfennige, in dem andern Thaler stehn, so müssen diese auch erst in Pfennige verwandelt werden. Ist bey den Pfennigen ein Bruch, so muß man sie mit dem Nenner desselben multipliciren, den Zähler dazu addiren, und den Nenner wieder darunter setzen.

2) Daß das unbekannte Glied, wenn es gefunden worden, dieselbe Benennung bekomme, welche das dritte Glied hat.

Z. B. Wenn das dritte Glied in Loth verwandelt worden, so wird das gefundene vierte Glied auch mit dem Namen der Lothe benannt.

Anmerk. Die übrigen Regeln, welche sich auf besondere Anwendungen dieser Rechnung beziehn, werden in dem folgenden bey den Beyspielen selbst gegeben werden.

40. Wie wird die Regel de Tri eingetheilt?

1) In die **einfache**, oder eigentliche **Regel de Tri**, wenn drey Glieder aus einer einigen Proportion gegeben sind, deren viertes unbekanntes Glied zu suchen ist.

2) In die **zusammengesetzte Regel de Tri**, wenn mehrere Glieder aus verschiedenen Proportionen gegeben sind, dazu ein oder mehrere unbekannte Glieder zu suchen sind. Dazu gehört insonderheit

a) Die **Regel von Fünfen**, oder **de Quinque**, wenn fünf Glieder aus zwey verschiedenen Proportionen gegeben sind.

b) Die **Kettenregel**, wenn Glieder aus mehreren Proportionen gegeben sind.

c) Die **Gesellschaftsrechnung**, wenn ein Gewinn oder Verlust unter mehrere nach dem Verhältniß dessen, was sie zusammengelegt haben, getheilt wer-

den soll. Dazu gehört noch die **Vermischungsregel**, wenn man aus den gegebenen Verhältnissen einzelner Materien finden soll, wieviel von jeder zu einer gegebenen vermischten Menge genommen werden müsse; ingleichen die **Falsirechnung**, wenn die unbekannten Glieder der Proportionen nach gegebenen Verhältnissen erst willkührlich angenommen werden müssen, ehe ihre wahre Größe gefunden werden kann.

Anmerk. Die einfache sowol als zusammengesetzte Regel de Tri wird gemeiniglich auch in eine gerade und umgekehrte eingetheilt. Die erste begreift diejenigen Rechnungsbeyspiele unter sich, in welchen die drey gegebenen Glieder der Proportion so auf einander folgen, daß das unbekannte Glied schon das vierte ist: die andere aber solche Beyspiele, in welchen die drey gegebenen Glieder erst versetzt werden müssen, um das unbekannte Glied zum vierten zu machen.

Beyspiele der Regel de Tri.

I. Der einfachen, und zwar

a) Der geraden oder directen Regel de Tri, welche wieder eingetheilt werden können

aa) in solche, welche im ersten Gliede 1 haben, und zwar mit einer solchen Benennung, welche im zweyten Gliede allein vorkommt, oder unter welche das zweyte Glied gebracht werden kann; da also nur das zweyte und dritte Glied mit einander multiplicirt werden dürfen, um das vierte zu finden, weil 1 nicht dividirt, als:

1) Es kostet ein Centner 4 Rthlr. wieviel kosten 20 Centner? Hier sieht man leicht, daß die Proportion diese sey, wie sich 1 Centner zu 20 Centnern verhält, so verhalten sich 4 Rthlr. zu der gesuchten Anzahl Thaler, folglich wird 20 mit 4 multiplicirt. Das Product 80 giebt sogleich das gesuchte vierte Glied, oder das Facit; denn 1 Centner verhält sich zu 20 Centnern, wie 4 Rthlr. zu 80 Rthl.

2) Es kostet 1 Elle 4 Rthlr. 8 Ggr. wieviel kosten 12 Ellen? Hier müssen die 4 Rthlr. 8 Gr. erst in Groschen verwandelt werden. Die Rechnung selbst ist folgende:

1 Elle

1 Ell: 12 Ellen = 4 Rthlr. 8 Ggr. : vierte unbekannte Glied.

24

104 Ggr.
12

208
104

24) 1248 Ggr. | 52 Rthlr.
120

48
48
0

Das Product 1248 aus den beyden mittlern Gliedern 12 und 104, welches das gesuchte vierte Glied giebt, bedeutet hier Groschen, weil das dritte Glied in Groschen verwandelt worden, folglich mußte dasselbe mit 24 dividirt werden, um es in Thaler und Groschen zu verwandeln.

Anmerk. 1) Es hätte auch sogleich 12 mit 8, und hierauf mit 4 multiplicirt werden können. Das erste Product giebt 96 Groschen, oder 4 Rthlr., das andere 48 Rthlr., beyde zusammen macht wie vorhin 52 Rthlr. Oder, wenn man nicht mit der 12 auf einmal hätte multipliciren wollen, so hätte man diese Zahl in ihre Factoren 6 und 2, oder 4 und 3 zerfällen, und hierauf 4 Rthlr. 8 Ggr. entweder mit 6 multipliciren, das gefundene Product 26 Rthlr. aber hernach doppelt nehmen, oder 4 Rthlr. 8 Ggr. mit 4, und das Product 17 Rthlr. 8 Ggr. wieder mit 3 multipliciren können, welches in beyden Fällen wieder 52 Rthlr. giebt. Diese und andere dergleichen Verkürzungen, welche bey der Regel de Tri gebraucht werden können, und davon bey den folgenden Exempeln mehrere angezeigt werden sollen, machen die sogenannte welsche Practik aus.

2) Wenn, wie es gewöhnlich ist, die Zahlen der Frage so, wie sie nach einander in der Aufgabe genannt sind, hingesetzt werden, z. B. wenn das hier berechnete Beyspiel folgendergestalt angesetzt, und wie vorhin berechnet wird:

1 Elle 4 Rthlr. 8 Ggr. 12 Ellen,

so kommt eben dasselbe Facit heraus, weil einerley Product zweyer Factoren heraus kommen muß, es mag der eine oder der andere Factor zum Multiplicandus gewählt werden. Nur muß man sich bey dergleichen Art der Ansetzung der Rechnung nicht der mathematischen Zeichen bedienen, als 1 Elle : 4 Rthlr. 8 gr. = 12 Ellen : 52 Rthlr.

Dies hieße 1 Elle verhält sich zu 4 Rthlr. 8 Ggr. wie 12 Ellen zu 52 Rthlr., wobey sich nichts denken läßt, weil zwi-

schen Ellen und Thalern, als Größen von verschiedener Art, kein Verhältniß statt finden kann.

3) Es kostet 1 Pfund 2 Rthlr 4 Sgr. 6 Pf. wieviel kosten 3 Centner? Hier müssen die 2 Rthlr. 4 Sgr. 6 Pf erst in Pfennige und die Centner in Pfunde verwandelt werden. Die Rechnung selbst ist folgende:

1 ℔ : 3 Ct. = 2 Rthlr. 4 Sgr. 6 Pf. : vierte unbekannte Glied.

110 — 24 —

330 ℔ 52 Sgr.

12

110

52

630 Pf.

330

18900

189

12) 207900 Pf. | 17325 Sgr. | 721 Rthlr. 21 Sgr.

12 | 168 | 24

87 | 52

84 | 48

39 | 45

36 | 24

30 | (21

24

60

60

0

4) Es kostet 1 Elle 3 Rthlr. 8 Sgr. wie viel kosten $7\frac{3}{4}$ Ellen? Hier müssen nicht nur die 3 Rthlr. 8 Sgr. in Groschen verwandelt, sondern es muß auch der Bruch $7\frac{3}{4}$ eingerichtet, und darauf mit den Groschen multiplicirt werden. Die Rechnung selbst ist folgende:

1 Elle

1 Elle : $7\frac{3}{4}$ Ellen = 3 Rthlr. 8 Ggr. : vierte unbekannte Glied.

24

31

80

4

31

2480 Ggr. | 620 Ggr. | 24 | 25 Rthlr. 20 Ggr.

4 | 48

140

120

(20

5) Es kostet 1 Loth 4 Ggr. $6\frac{2}{3}$ Pf. wieviel kosten 12 Pfund $24\frac{3}{5}$ Loth? Die Rechnung ist folgende:

1 Loth : 12 ℔ $24\frac{3}{5}$ Loth = 4 Ggr. $6\frac{2}{3}$ Pf. : vierte unbekannte Glied.

32 | 12

48 | $54\frac{2}{3}$ Pf.

36

$408\frac{3}{5}$ Loth. | 164 Pf.

2043 Loth. | 3

5

2043

164

8172

12258

2043

15)335052 Pf. | 22336 Pf. | 1861 Ggr. | 77 Rthl. 13 gr. $4\frac{4}{5}$ pf.

30 | 12 | 168

35 | 103 | 181

30 | 96 | 168

50 | 73 | (13

45 | 72

55 | 16

45 | 12

102 | (4

90

(12

6) Es kostet 1 Loth 4 Rthlr. 12 2/7 Gr. wieviel kosten 3 4/5 Centner? Hier muß der Bruch, welcher den Centnern angehängt ist, erst in Pfunde und Loth resolvirt werden, weil im ersten Gliede 1 Loth steht. Es enthalten aber 4/5 Centner 48 Pfund 28 4/5 Loth. Folglich ist die Proportion also aufzusetzen:

1 Loth : 3 Ct. 48 lb 28 4/5 Loth = 4 Rthlr. 12 2/7 gr. : vierte unbekannte Glied.

110 — 24

378 lb — 108 2/7 Ggr.
32 — 758
784 — Ggr.
1134 — 7

12124 4/5 Loth.
109120
109120 — 758
Loth. — 872960
9 — 54560
76384

63) 827 12960 Ggr. — 13 12904 Ggr. — 24 — 54704 Rthl. (8 8/63 Ggr.
63 — 120

197 — 112
189 — 96
81 — 169
63 — 168
188 — 104
126 — 96
569 — (8
567
260
252
(8

7) Es werden für einen Thaler 2 Centner 24 5/7 Pfund gekauft, wieviel wird man von derselben Waare für 16 1/12 Rthlr. bekommen? Die Rechnung ist folgende:

1 Rthlr.

1 Rthlr. : $16\frac{7}{11}$ Rthlr. = 2 Cl. $24\frac{1}{7}$ lb : vierte unbekannte Glied.

23 | 110
16 | $244\frac{2}{5}$ Pfund.
183 Rthlr. | 1221 Pfund.
11 | 5

1221
183
3663
9768
1221 | 110
55) 223443 lb | 4062 lb | 36 Cl. $102\frac{2}{3}$ lb
220 | 33
344 | 76
330 | 66
143 | (102
110
(33

8) Es kostet 1 Centner 5 Rthlr. 6 Ggr. 4 Pf. wieviel kosten 100 Centner? Antwort: 526 Rthlr. 9 Ggr. 4 Pf.

9) Es kostet 1 Mandel 20 Ggr. 3 Pf. wieviel kosten 12 Schock? Antwort: 40 Rthlr. 12 Ggr.

10) Es kostet 1 Elle $\frac{5}{6}$ Rthlr. wieviel kosten $\frac{3}{4}$ Ellen? Antwort: $\frac{5}{8}$ Rthlr. oder 15 Ggr.

11) Es kostet 1 Winspel $10\frac{4}{7}$ Rthlr. $16\frac{1}{2}$ Ggr. was kosten 37 Winspel? Hier müssen die $\frac{4}{7}$ Rthlr. erst in Groschen resolvirt, und diese zu $16\frac{1}{2}$ Groschen addirt werden. Das Facit ist 425 Rthlr. $10\frac{4}{7}$ Pf.

12) Es werden für 1 Rthlr. gekauft $\frac{7}{8}$ Centner, wieviel kauft man von derselben Waare für $\frac{6}{7}$ Rthlr.? Antwort: $17\frac{7}{9}$ Pfund.

13) Es verdient ein Arbeiter alle Tage 6 Ggr. wieviel wird er in $7\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 6 Arbeitstagen gerechnet, verdienen? Antwort: 11 Rthlr. 6 Ggr.

14) Es verzehrt einer alle Tage $4\frac{1}{2}$ Sgr. wieviel braucht er in einem Jahre, welches 365 Tage enthält? Antwort: 68 Rthlr. 10 Sgr. 6 Pf.

bb) Beyspiele der geraden Regel de Tri, welche im zweyten oder dritten Gliede 1 haben, wobey also nur das erste Glied in das zweyte oder dritte dividirt werden darf, weil 1 nicht multiplicirt, als:

1) Es kosten 24 Ellen 50 Rthlr. was kostet eine Elle? Hier darf nur 24 in 50 dividirt werden, der Quotient $2\frac{1}{12}$ Rthlr. giebt das gesuchte Facit. Denn 24 Ellen verhalten sich zu 1 Elle, wie 50 Rthlr. zu $2\frac{1}{12}$ Rthlr. oder 2 Rthlr. 2 Sgr.

2) Es kosten 30 Centner 12 Rthlr. 14 Sgr. 3 Pf. wieviel kostet 1 Centner? Die Rechnung ist folgende:

30 Ct. : 1 Ct. = 12 Rthlr. 14 Sgr. 3 Pf. : vierte unbekannte Glied.

24
62
24
302 Sgr.
12
607
302
30) 3627 Pf. | 120 $\frac{7}{10}$ Pf. | 12 | 10 Sgr. $\frac{7}{10}$ Pf.

3) Es kostet 27 Winspel 8 Scheffel 650 Rthlr. 16 Sgr. wieviel kosten 1 Scheffel? Die Rechnung ist folgende:

27 Winsp. 8 Schff. : 1 Schff. = 650 Rthlr. 16 Sgr. : vierte unbekannte Glied.

24 | 24
116 | 2616
54 | 130
656 Schff. | 656) 15616 Gr. | 23 $\frac{208}{656}$ Gr. od. 23 Gr. und beynahe 10 Pf.
13112
2496
1968
(528

4) Es

4) Es kosten 24 Centner 100 Rthlr. was kostet 1 Pfund? Hier müssen nicht nur die Centner zu Pfunden gemacht, sondern es können auch die Thaler in Pfennige verwandelt werden, damit man nachher nicht nöthig habe, Brüche zu resolviren. Die Rechnung ist folgende:

24 Cl. : 1 ℔ = 100 Rthlr. : vierte unbekannte Glied.

110	24
240	2400 Ggr.
24	12
2640 ℔	4800
	24
2640)	28800 Pf.
	264
	2400

$10\frac{10}{11}$ Pf.

5) Es kosten $\frac{3}{4}$ Pfund $\frac{5}{6}$ Ggr. wieviel kostet 1 Pfund? Hier wird der erste Bruch $\frac{3}{4}$ in den Bruch $\frac{5}{6}$ dividirt. Der Quotient $\frac{20}{18}$ oder $1\frac{1}{9}$ Ggr. ist das gesuchte Facit.

6) Es kosten $24\frac{3}{4}$ Ellen 52 Rthlr. $4\frac{2}{3}$ Gr. wieviel kostet 1 Elle? Die Rechnung ist folgende:

$24\frac{3}{4}$ Ell. : 1 Ell. = 52 Rthlr. $4\frac{2}{3}$ Ggr. : vierte unbekannte Glied.

$\frac{99}{4}$ Ellen.

24

212

104

$1252\frac{2}{3}$ Ggr.

$$\frac{4}{99} \times \frac{3758}{3} = \frac{15032}{297} = 50\frac{182}{297} \text{ gr.} = 2 \text{ thl. } 2 \text{ gr.}$$

($7\frac{35}{99}$ pf.

7) Es werden für $20\frac{2}{7}$ Rthlr. 3 Centner $40\frac{3}{4}$ Pfund gekauft, wiviel kauft man von derselben Waare für 1 Rthlr.? Die Rechnung ist folgende:

$20\frac{2}{7}$ thl. : 1 thl. = 3 Cl. $40\frac{3}{4}$ ℔ : vierte unbekannte Glied.

$\frac{142}{7}$

110

$370\frac{3}{4}$ ℔

$$\frac{7}{142} \times \frac{1483}{4} = \frac{10381}{568} = 18\frac{157}{568} \text{ ℔} = 18 \text{ ℔ } 8 \text{ Lt.}$$

($3\frac{27}{71}$ Qt.

8) Es verdienen 12 Arbeiter, welche alle gleichviel Lohn bekommen, täglich 4 Rthlr. 6 Sgr. wieviel bekommt einer? Antwort: 8 Sgr. 6 Pf.

9) Es kosten 16 Centner $64\frac{2}{3}$ Rthlr. $14\frac{5}{8}$ Sgr. $4\frac{1}{2}$ Pf. was kostet 1 Centner? Hier müssen die Brüche bey den Thalern und Groschen erst in Groschen und Pfennige resolvirt, und diese zu den gegebenen Groschen und Pfennigen addirt werden. Das Facit ist 4 Rthlr. 1 Groschen $5\frac{1}{3}\frac{3}{4}$ Pfennige.

10) Es kosten $\frac{1}{2}\frac{8}{5}$ Centner $\frac{4}{5}\frac{7}{6}$ Rthlr. wieviel kostet 1 Centner? Antwort: 1 Rthlr. 3 Sgr. $21\frac{5}{7}$ Pf.

ee) Beyspiele der geraden Regel de Tri, welche in allen gegebenen Gliedern mehrere Einheiten, oder eine solche einzelne Einheit haben, welche erst in mehrere Einheiten einer niedrigern Ordnung verwandelt werden muß; wobey also die beyden mittlern Glieder in einander multiplicirt werden müssen, und das Product durch das erste Glied dividirt werden muß.

1) Es kosten 2 Ellen 3 Rthlr. wieviel kosten 10 Ellen? Hier muß 10 mit 3 multiplicirt, und das Product 30 durch 2 dividirt werden. Der Quotient 15 giebt das gesuchte Facit; denn 2 Ellen verhalten sich zu 10 Ellen, wie 3 Rthlr. zu 15 Rthlr.

2) Es

2) Es kosten 4 Centner 58 Pfund 14 Loth 3 Quentl. 8 Rthlr. 11 Ggr. 2 Pf. wieviel kosten 10 Centner? Die Rechnung selbst ist folgende:

4 Cl. 58 ℔ 14 Lt. 3 Ql. : 10 Cl. = 8 Rthlr. 11 Gr. 2 Pf. : vierte Glied.

110	11 : 0	24
498 ℔	1100 ℔	203 Ggr.
32	32	12
1010	2200	408
1494	33	203
15950 Loth.	35200 Lt.	2438 Pf.
4	4	
63803 Ql.	140800 Ql.	
	2438	
	1126400	
	4224	
	5632	
	2816	

			12	24
63803)	343[illegible]400 pf.	5380 pf.	448 gr.	18 Rtl.
	319015	48	24	
	242554	58	208	
	191409	48	192	
	511450	100	(16 Ggr.	
	510424	96		
	(10260	(4 Pf.		

3) Es werden für 52 Rthlr. 16 Ggr. 4 Pf. 20 Centner 12 Pfund gekauft, wieviel wird von derselben Waare für 131 Rthlr. 16 Ggr. 10 Pf. gekauft werden? Die Rechnung selbst ist folgende:

52Thl. 16 gr. 4 pf. : 13 Thl. 16 gr. 10 pf. = 20 Ct. 12 lb vierte Glied.

24	24	11 : 0	
224	540	2212 lb	
104	262		
1264 Sgr.	3160 Sgr.		
12	12		
2532	6330		
1264	316		
15172 Pf.	37930 Pf.		
	2212		
	75860		
	3793	110	
	7586		
	7586		
15172) 83901160 lb	5530 lb	50 Centner 30 lb	
75860	55		
80411	(30		
75860			
45516			
45516			
0			

Anmerk. Dieses Beyspiel kann viel kürzer ausgerechnet werden, wenn man die in Pfennige verwandelten Glieder des ersten Verhältnisses 15172 : 37930 beyde durch 7586 dividirt, wodurch man das Verhältniß 2 : 5 bekommt, welches mit dem Vorhergehenden einerley ist. Folglich darf man nur sogleich 20 Centner 12 Pfund mit 5 multipliciren, und das Product durch 2 dividiren, oder halb nehmen. Der Quotient giebt dasselbe Facit.

4) Es kosten $\frac{3}{4}$ Ellen $\frac{5}{6}$ Rthlr. wieviel kostet $\frac{1}{2}$ Elle? Hier wird $\frac{1}{2}$ mit $\frac{5}{6}$ multiplicirt, das Product $\frac{5}{12}$ aber durch $\frac{3}{4}$ dividirt. Der Quotient $\frac{20}{36}$ oder $\frac{5}{9}$ Rthlr. oder $13\frac{1}{3}$ ggr. 4 pf. giebt das gesuchte Facit.

5) Es kosten $4\frac{3}{8}$ Centner 2 Rthlr. $9\frac{3}{7}$ Sgr. wieviel kosten $6\frac{1}{4}$ Pfund? Hier muß der Bruch, welcher den Centnern angehängt ist, erst in $41\frac{1}{4}$ Pfund resolvirt werden, weil im zweyten Gliede Pfunde sind. Die Rechnung selbst ist folgende:

4 Ct.

4 Ctl. 41$\frac{1}{4}$ ℔ : 6$\frac{1}{4}$ ℔ = 2 Rthlr. 9$\frac{3}{7}$ Ggr.; vierte Glied?

$$\frac{110}{481\frac{1}{4}\text{ ℔}} \quad \frac{25}{4}\text{ ℔} \quad \frac{24}{57\frac{3}{7}}$$

$$\frac{1925}{4}\text{ ℔} \qquad \frac{402}{7}\text{ Gr.}$$

$$\frac{25}{4} \times \frac{402}{7} = \frac{10050}{28}; \quad \frac{10050}{28} \times \frac{4}{1925} = \frac{40200}{53900}\text{ Gr.} = 8\frac{512}{539}\text{ Pf.}$$

6) Es kosten 16 Scheffel 2$\frac{1}{4}$ Metze 14 Rthlr. 7$\frac{1}{2}$ Ggr. wieviel kostet 1 Winspel? Hier muß der eine Winspel erst in Metzen verwandelt werden, weil im ersten Gliede Metzen sind. Das Facit ist 21 Rthlr. 6 Ggr. $9\frac{1}{10}\frac{3}{3}\frac{5}{3}$ Pf.

7) Es verdienen 7 Arbeiter täglich 1$\frac{1}{2}\frac{3}{8}$ Rthlr. wieviel werden 50 Arbeiter bey derselben Arbeit täglich verdienen? Antwort: 12 Rthlr. 7 Ggr. 2$\frac{6}{7}$ Pf.

8) Es verzehrt jemand in $\frac{3}{4}$ Jahren 234$\frac{5}{8}$ Rthlr. wieviel wird er bey derselben Lebensart in 5$\frac{1}{2}$ Jahren verzehren? Antwort: 1720 Rthlr. 14 Ggr.

9) Es machen 4 Ducaten 11 Rthlr. aus, wieviel machen 256$\frac{1}{2}$ Ducaten in Thalern? Antwort: 705 Rthlr. 9 Ggr.

10) Es werden für 6$\frac{2}{3}$ Thaler 5$\frac{3}{7}$ Centner 104$\frac{1}{2}$ ℔ 13$\frac{2}{3}$ Loth gekauft, wieviel wird man für 100 Ducaten von derselben Waare bekommen? Antwort: 257 Ctl. 42 Pfund 5$\frac{1}{2}\frac{3}{8}$ Loth.

11) Es ist ein Capital von 1500 Rthlr. auf 5 pro Cent ausgethan worden, das ist, jede 100 Rthlr. Capital geben jährlich 5 Rthlr. Interessen, wie hoch belaufen sich die Interessen von dem ganzen Capital in einem Jahre? Antwort: auf 75 Rthlr.

12) Es giebt das Gold gegen Courant 5$\frac{2}{3}$ pro Cent Agio oder Aufgeld, wieviel Aufgeld bekommt man auf 56$\frac{1}{4}$ Louisd'or? Antwort: 16 Rthlr. 2$\frac{2}{7}$ Pf.

b) Beyspiele der umgekehrten Regel de Tri.

1) Es arbeiten 20 Leute an einem Graben, und führen denselben täglich 5 Ellen fort, wieviel Arbeiter werden erfordert, daß derselbe Graben täglich 100 Ellen weit fortgeführt

führt werde?. Wollte man bey diesem Exempel die Glieder der Proportion in der Ordnung aufsetzen, in welcher sie gegeben worden, und alsdenn dazu das vierte Glied suchen, so würde solches 25 seyn. Man sieht aber leicht, daß 25 Leute nicht werden 100 Ellen vollenden können, wenn 20 nur 5 Ellen weit graben. Folglich muß zuerst untersucht werden, welches Glied in dieser Proportion, davon drey Glieder bekannt sind, fehle, da man denn leicht sieht, daß das fehlende Glied das zweyte sey, denn 20 Leute verhalten sich zu der gesuchten Anzahl Leute, wie 5 Ellen zu 100 Ellen. Hierauf wird das letzte Verhältniß voran gesetzt, damit das fehlende Glied das vierte werde, und alsdenn ist die Rechnung folgende:

5 Ellen : 100 Ellen = 20 Leute : vierte unbekannte Glied.

2:0	
5) 2000	400 Leute.

Anmerk. Bey einem jeden Beyspiel, das nach der einfachen Regel de Tri zu berechnen ist, werden 3 Zahlen gegeben, aus welchen die vierte zu finden ist. Von diesen 3 gegebenen Zahlen beziehen sich 2 allemal auf einerley Art von Einheit, z. B. auf Thaler, Groschen, Ellen, Pfunde u. dergl. Die dritte aber entweder auf eine von jener völlig verschiedene oder doch anders benannte Einheit. In allen 3 Gliedern kann nemlich z. B. die Einheit 1 Rthlr. seyn, aber im zweyten bedeutet sie 1 rthlr. Capital, und in der dritten Interesse, Aufgeld und dergleichen. Diese dritte Zahl muß in der zu berechnenden Proportion allemal das dritte Glied werden, und die beyden andern Zahlen werden die beyden ersten Glieder, oder machen das erste Verhältniß aus. In welcher Ordnung sie in diesem Verhältniß stehn müssen, das entscheidet sich allemal durch die Untersuchung, ob die gesuchte Zahl größer oder kleiner seyn müsse, als das dritte Glied. Ist jenes, so muß im ersten Gliede die kleinere, und im zweyten die größere; ist dieses, so muß im ersten Gliede die größere, und im zweyten die kleinere der Zahlen stehn, welche das erste Verhältniß ausmachen. Wenn man bey jeder vorkommenden Rechnung hierauf acht giebt, so bedarf es kaum des Unterschiedes zwischen der geraden und umgekehrten Regel de Tri.

2) Es werden 12 Morgen Acker mit 6 Pflügen in einem Tage umgepflügt, wieviel werden erfordert, um in einem Tage 100 Morgen zu pflügen? Die Rechnung selbst ist folgende:

12 Mor-

12 Morgen: 100 Morgen = 6 Pflüge: vierte unbekannte Glied.

6	
12) 600	50 Pflüge.

3) Es verfertigen 2 Schuster in einem Tage 3 Paar Schuh, wieviel Schuster werden erfordert, um in einem Tage 50 Paar fertig zu machen? Die Rechnung selbst ist folgende:

3 Paar: 50 Paar = 2 Schuster: vierte unbekannte Glied.

2	
3) 100	33 Schuster
9	
10	
9	
1	

Anmerk. In diesem Beyspiel darf der Rest, wie man leicht einsieht, nicht in einen Bruch gesetzt werden, sondern es muß entweder angenommen werden, daß die 33 Schuster etwas geschwinder arbeiten, oder wenn der Bruch mehr als $\frac{1}{2}$ beträge, so müßte das gefundene vierte Glied um 1 vermehrt werden.

4) Ein Bote, welcher alle Tage 5 Meilen geht, kommt an einen Ort in 12 Tagen, wieviel Meilen muß ein andrer täglich gehn, welcher in 8 Tagen an demselben Orte seyn will? Antwort: $7\frac{1}{2}$ Meile.

5) Es mahlen 3 Gänge in einer Mühle in einer Zeit von 4 Wochen 3 Winspel, wieviel Gänge müßten genommen werden, wenn dieses Korn in 6 Tagen gemahlen werden sollte? Hier kommt die Menge des Korns gar nicht mit in die Proportion, sondern es wird nur geschlossen, wie 6 Tage zu 28 Tagen, also 3 Gänge zu 14 Gängen.

6) Ein Capital von 100 Rthlr. giebt jährlich 5 Rthlr. Interessen, wie groß muß das Capital seyn, welches jährlich 300 Rthlr. Interessen geben soll? Antwort: 6000 Rthlr.

7) Ein Zweygroschenbrod von feinem Mehl muß 4 Pfund 8 Loth, von grobem Mehl aber 4 Pfund 27 Loth wiegen, wenn der Scheffel Rocken 1 Rthlr. gilt, wie

schwer

schwer muß das weiße und das grobe Brod gebacken werden, wenn der Scheffel 20 Ggr. gilt? Antwort: das erste 5 Pfund $3\frac{1}{5}$ Loth, das andere 5 Pfund 26 Loth.

Anmerk. Hier mußte geschlossen werden, wie 20 Ggr. zu 1 Rthlr. also 4 Pfund 8 Loth, oder 4 Pfund 27 Loth zu dem gesuchten vierten Gliede, folglich mußte der geringere Kornpreis voranstehen, weil das Brod schwerer werden muß, wenn das Korn wohlfeiler ist. Gesetzt aber, es würde gefragt, wie schwer ein weißes Brod seyn müsse, wenn der Scheffel Korn 1 Rthlr. 4 Ggr. zu 1 Rthlr. also 4 Pfund 8 Loth zu dem gesuchten vierten Gliede 3 Pfund $20\frac{4}{7}$ Loth, folglich muß alsdenn der größere Kornpreis voranstehn, weil das Brod leichter werden muß, wenn das Korn theurer ist. Die Gewichte verhalten sich hier nemlich umgekehrt, wie die Kornpreise.

8) Es werden zu einem Kleide erfordert 5 Ellen Tuch, welches $1\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, wieviel Ellen werden erfordert, wenn das Tuch nur $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist? Antwort: $5\frac{5}{6}$ Ellen.

9) Es soll ein Kleid von 6 Ellen Tuch, welches $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist, mit Zeuge, welches nur $\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, gefuttert werden, wieviel Ellen Futter werden dazu erfordert? Antwort: 12 Ellen.

10) Es soll aus 20 Mark 14 löthigen Silber, d. i. in welchem jede Mark 14 Loth feines Silber und 2 Loth Kupfer enthält, 9 löthiges gemacht werden, wieviel Kupfer muß dazu gesetzt werden? Hier muß erst 9 von 14 abgezogen werden, der Rest 5 zeigt an, daß unter einer Mark 9 löthigen Silber 5 Loth Kupfer mehr sind als in einer Mark 14 löthigen. Hierauf wird geschlossen: wie 9 Loth zu 5 Loth, also 20 Mark zu dem gesuchten vierten Gliede $11\frac{1}{9}$ Mark Kupfer. Folglich bekommt man mit diesem Zusatze aus 20 Mark 14 löthigen Silber $31\frac{1}{9}$ Mark 9 löthiges.

Anmerk. Die Probe einer nach der einfachen Regel de Tri berechneten Proportion, oder die Untersuchung, ob das vierte Glied richtig berechnet worden, kann auf folgende Weise angestellt werden: 1) Es werden die Glieder der Proportion also versetzt, daß das gefundene vierte Glied zum ersten, zweyten oder dritten gemacht, folglich eins von den gegebenen Gliedern das vierte werde, welches man hierauf als unbekannt ansieht, und aus den drey erstern sucht.

Ist

Ist nun das Facit diesem vierten Gliede gleich, so ist die Rechnung richtig. Z. B. Es sey die Frage aufgegeben: 2 Ellen kosten 3 Rthlr. wieviel kosten 10 Ellen, und man habe zum Facit bekommen 15 Rthlr. so kann man, um die Richtigkeit desselben zu prüfen, die vier Glieder der Proportion auf folgende dreyerley Weise versetzen, um dieses gefundene Glied 15 Rthlr. unter die drey ersten zu bringen, und eins der drey gegebenen zum vierten zu machen; da denn das Facit, welches in einer jeden Proportion aus den drey ersten Gliedern gefunden und denselben sogleich beygefüget worden, allemal dem als unbekannt angenommenen, aber gegebenen Gliede gleich ist:

15 Rthlr. : 3 Rthlr. = 10 Ellen : 2 Ellen.
3 Rthlr. : 15 Rthlr. = 2 Ellen : 10 Ellen.
10 Ellen : 2 Ellen = 15 Rthlr. : 3 Rthlr.

Oder 2) es wird das gefundene vierte Glied mit dem ersten multiplicirt. Das Product muß dem Producte aus den mittlern Gliedern gleich seyn. Oder 3) es wird das erste Glied in das zweyte, und das dritte in das gefundene vierte Glied dividirt. Beyde Quotienten oder Exponenten müssen einander gleich seyn. Oder 4) es wird das erste Glied in das dritte, und das zweyte in das gesuchte vierte Glied dividirt. Beyde Quotienten müssen wieder einander gleich seyn.

II. Beyspiele der zusammengesetzten Regel de Tri.

a) Der Regel von Fünfen, oder de Quinque, davon

1) überhaupt zu bemerken, das die hieher gehörigen Beyspiele auf zweyerley Weise berechnet werden können, nemlich

a) es werden aus den gegebenen 5 Gliedern zuerst drey, welche zusammen gehören, in eine Proportion gesetzt, und dazu das vierte Glied gefunden; hierauf wird dieses gefundene vierte Glied mit den beyden übrigen gegebenen in eine andere Proportion gesetzt, und dazu wieder das vierte Glied gefunden. Dieses ist das gesuchte Facit.

b) Oder es werden aus den 5 gegebenen Gliedern zwey Glieder, welche einerley Benennung haben, mit zwey andern, welche auch einerley Benennung haben, multiplicirt, jedoch so, daß beyde Factoren sich auf einander als Ursachen und ihre Wirkungen, Arbeiten und Zeiten, darin sie geschehen, Geschwindigkeiten

und ihre Räume oder Zeiten, Capitale und Interessen oder Zeiten, wie lange sie ausstehn, u. dergl. beziehn; hierauf werden diese beyden Producte mit dem übrigen gegebenen Gliede in eine Proportion gesetzt, zu welcher das vierte Glied gefunden wird, welches das gesuchte Facit ist.

2) Insonderheit:

a) Beyspiele der geraden oder directen Regel von Fünfen.

1) Es können mit einem Pfluge in einem Tage 2 Morgen Acker umgepflügt werden, wie viel Land wird mit 12 Pflügen in 6 Tagen gepflügt werden?

Die Rechnung selbst ist folgende:

a) Nach der ersten Art:

1 Pflug : 12 Pflügen = 2 Morgen : 24 Morgen.
1 Tag : 6 Tagen = 24 Morgen : 144 Morgen.

Anmerk. Hier ist durch die erste Proportion gefunden worden, wieviel Morgen Acker in einem Tage; durch die andere aber, wieviel in 6 Tagen mit 12 Pflügen umgepflügt werden können.

b) Nach der andern Art:

1 Pflug 12 Pflüge.
1 Tag 6 Tage.

1 : 72 = 2 Morgen : 144 Morgen.

Anmerk. Zu einiger Beurtheilung der Richtigkeit dieser Rechnung nach der andern Art dient folgendes. Wenn man die nach der ersten Art berechneten Proportionen vergleicht; so erhellt, daß das vierte Glied der ersten Proportion (24 Morgen) wiederum ein Glied der zweyten Proportion, und zwar das dritte, werden müsse. Wenn nun die Zahlen beyder Proportionen als unbekannt angesehen werden, welches in diesen Rechnungen allemal, der Richtigkeit des Facit unbeschadet, geschehen kann; so geben beyde Proportionen

1 : 12 = 2 : 24
1 : 6 = 24 : 144

nach dem vorhergehenden wieder eine richtige Proportion, wenn die gleichnamigen Glieder multiplicirt werden; als denn ist

1 × 1 : 12 × 6 = 2 × 24 : 24 × 144.

Diese

Diese Proportion bleibt noch richtig, wenn die Glieder der zweyten Verhältniß mit 24 dividirt werden; es ist nemlich auch

$$1 \times 1 : 12 \times 6 = 2 : 144.$$

Es hätte also bey der obigen Multiplication der Factor 24 sogleich weggelassen werden, ja er hätte unbekannt bleiben können, da die gesuchte Zahl 144 dennoch herauskommt, wenn nur die Glieder der ersten Verhältnisse multiplicirt, und die Producte mit der Zahl, welche sich mit der gesuchten auf einerley Einheit bezieht, (hier 2 Morgen) so in Proportion gesetzt werden, daß die gedachte Zahl das dritte Glied wird. Dies ist die Verfahrungsart bey der zweyten Berechnung dieses Beyspiels.

2) Es verfertigen 2 Schuster in einem Tage 3 Paar Schuh, wieviel werden 20 Schuster in 6 Tagen verfertigen? Die Rechnung selbst ist folgende:

a) Nach der ersten Art:

2 Schuster : 20 Schuster = 3 Paar Schuh : viertes Glied.

3

2) 60

30 Paar Schuh:

1 Tag : 6 Tagen = 30 Paar Schuh : 180 Paar Schuh.

b) Nach der zweyten Art:

2 Schuster.	20 Schuster.
1 Tag.	6 Tage.
2 :	120 = 3 Paar Schuh : viertes Glied.

3

2) 360 | 180 Paar Schuh.

3) Es bekommt ein Fuhrmann für 12 Centner, welche er 10 Meilen führt, 5 Rthlr. Fuhrlohn, wieviel wird er für 50 Centner bekommen, die er 24 Meilen weit führt? Antwort: 50 Rthlr.

4) Es giebt ein Capital von 100 Rthlr. in einem Jahre 5 Rthlr. Zinsen, wieviel Zinsen wird ein Capital von 3000 Rthlr. in 6 Jahren geben? Die Rechnung selbst ist folgende:

a) Nach der ersten Art:

100 rthlr. Capital : 3000 rthlr. Capit. = 5 rthlr. Zinsen : 150 rthlr. Zinsen.
1 Jahr ; 6 Jahren = 150 rthlr. Zinsen : 900 rthlr. Zinsen.

b) Nach der andern Art:

100 Rthlr. Capit. 3000 Rthlr. Capital:
1 Jahr. 6 Jahr.

100 : 18000 = 5 Rthlr. Zinsen : 900 Rthlr. Zinsen.

5) Es giebt ein Capital von 2520 Rthlr. in einem Jahre 126 Rthlr. Zinsen, wieviel Zinsen würde dasselbe, wenn noch 480 Rthlr. dazu gelegt werden, in $1\frac{3}{4}$ Jahren geben? Antwort: $262\frac{1}{2}$ Rthlr.

6) Es verzehrt einer in 4 Wochen 22 Rthlr. 16 Ggr. 8 Pf. wieviel würden sechs Leute bey eben der Lebensart in einem Jahre verzehren? Antwort: 1770 Rthlr. 4 Ggr.

7) Es kosten 5 Ellen Tuch, welches $1\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, 12 Rthlr. $7\frac{2}{3}$ Ggr. wieviel werden 21 Ellen Tuch, welches von gleicher Güte aber $2\frac{1}{4}$ Ellen breit ist, kosten? Antwort: 66 Rthlr. 12 Ggr. $7\frac{1}{5}$ Pf.

8) Es können in einem viereckten Garten, welcher 60 Ruthen lang und $52\frac{2}{7}$ Ruthen breit ist, 3000 Stück Bäume gepflanzt werden, wieviel Bäume von derselben Größe können in einem andern viereckten Garten stehn, welcher $80\frac{1}{2}$ Ruthe lang und $46\frac{3}{4}$ Ruthen breit ist? Antwort: 3591.

bb) Beyspiele der umgekehrten Regel von Fünfen.

1) Es können mit einem Pfluge in einem Tage 2 Morgen Acker umgepflügt werden, wieviel Pflüge werden erfordert, um 144 Morgen in 6 Tagen umzupflügen? Die Rechnung ist folgende:

a) Nach der ersten Art:

1 Tag : 6 Tagen = 2 Morgen : 12 Morgen.
12 Morgen : 144 Morgen = 1 Pflug : 12 Pflügen.

Oder:

2 Morgen : 144 Morgen = 1 Pflug : 72 Pflügen.
6 Tage : 1 Tag = 72 Pflüge : 12 Pflügen.

Anmerk. Hier mußte zuerst gefunden werden, entweder wieviel Morgen mit einem Pfluge in 6 Tagen umgepflügt werden können, oder wieviel Pflüge erfordert würden, wenn 144 Morgen in einem Tage umgepflügt werden sollten. Hierauf mußte aus diesem gefundenen und den beyden übrigen gegebenen Gliedern eine Proportion gemacht, und

und in derselben, durch eine Versetzung der Glieder, das gesuchte Glied zum vierten gemacht, und darauf gefunden werden.

b) Nach der andern Art:

2 Morgen : 144 Morgen
6 Tage : 1 Tag

12 : 144 = 1 Pflug : 12 Pflügen.

Anmerk. 1) Hier mußte 1 Tag nicht mit 2 Morgen multiplicirt werden, ob diese beyde Factoren gleich zusammen zu gehören scheinen, sondern 6 Tage mußten unter 2 Morgen, und 1 Tag unter 144 Morgen gesetzt werden, weil die Anzahl der Pflüge, welche nach der Anzahl der Morgen zwar in der Verhältniß 2 : 144 zunimmt, nach der Anzahl der Tage wieder in der Verhältniß 6 : 1 abnehmen muß. Folglich mußte die Verhältniß der Tage so gesetzt werden, daß sie fiel, indem die Verhältniß der Morgen steigend war. Diese aber mußte als die größte Verhältniß steigend angesetzt werden, weil nach derselben die Anzahl der Pflüge mehr zunimmt, als sie nach der Verhältniß des Tage abnimmt.

2) Alle vorhergehende Rechnungsbeyspiele der geraden Regel von Fünfen, können eben so, wie solches hier mit dem ersten derselben geschehn ist, zu Beyspielen der umgekehrten Regel von Fünfen gemacht werden. Folglich dienen beyde Regeln auch einander gegenseitig zur Probe.

2) Es ist ein Capital auf 5 pro Cent ausgethan worden, und giebt alle Monat 24 Rthlr. Interessen, wie groß ist das Capital? Die Rechnung ist folgende:

a) Nach der ersten Art:

5 Rthlr. Zinsen : 24 Rthlr. Zinsen = 100 Rthlr. Capit. : 480 Rthlr. Capit.
1 Monat : 12 Monat = 480 Rthlr. Capital : 5760 Rthlr. Capital.

b) Nach der andern Art:

5 Rthlr. Zinsen : 24 Rthlr. Zinsen.
1 Monat : 12 Monat

5 : 288 = 100 rthlr. Capit. : 5760 rthlr. Capit.

3) Ein Zweygroschenbrod wiegt 4 Pfund 8 Loth, wenn der Scheffel Rocken 1 Rthlr. kostet, wieviel muß ein Groschenbrod wiegen, wenn der Scheffel Rocken 20 ggr. kostet? Antwort: 2 Pfund 17⅓ Loth.

4) Es haben 2000 Mann in einer Festung auf 4 Wochen Proviant, wenn jeder täglich 2¼ Pfund Brod bekommt; es kommen aber noch 400 Mann dazu, und alle sollen mit

diesem Proviant 5 Wochen auskommen, wieviel Brod wird nunmehr einem jeden täglich gegeben werden müssen? Antwort: $1\frac{1}{4}$ Pfund.

b) Beyspiele der Kettenregel, davon

a) überhaupt zu bemerken, daß diese Beyspiele eben so wie die Beyspiele der Regel von Fünfen auf zweyerley Weise berechnet werden können; nur müssen hier mehr als zwo Proportionen gemacht, oder mehrere Paare Glieder derselben in einander multiplicirt werden.

b) Insonderheit

aa) Beyspiele der geraden Kettenregel.

1) Es können mit 2 Pflügen in 3 Tagen 9 Morgen Acker umgepflügt werden, wenn täglich 8 Stunden dazu angewendet werden, wieviel Land wird mit 10 Pflügen in 6 Tagen umgepflügt werden können, wenn täglich dazu 12 Stunden angewendet werden sollen? Die Rechnung ist folgende:

α) Nach der ersten Art:

2 Pflüge : 10 Pflüge = 9 Morgen : 45 Morgen.
3 Tage : 6 Tage = 45 Morgen : 90 Morgen.
8 Stunden : 12 Stunden = 90 Morgen : 135 Morgen.

Anmerk. Hier ist durch die erste Proportion gefunden worden, wieviel Morgen mit 10 Pflügen umgepflügt werden können, wenn dazu 3 Tage und täglich 8 Stunden angewandt werden; durch die zweyte, wieviel Morgen mit 10 Pflügen umgepflügt werden könten, wenn dazu 6 Tage und täglich 8 Stunden angewandt werden; durch die dritte aber, wieviel Morgen mit 10 Pflügen umgepflügt werden können, wenn dazu 6 Tage und täglich 12 Stunden angewandt werden. Folglich ist 135 Morgen das gesuchte Land.

β) Nach der andern Art:

2 Pflüge : 10 Pflüge
3 Tage : 6 Tage
8 Stunden : 12 Stunden.

48 : 720 = 9 Morgen : 135 Morgen.

Anmerk. 1) In denen nach der ersten Art berechneten 2 Proportionen ist das vierte Glied der ersten das dritte der zweyten

zweyten, und das vierte Glied der zweyten das dritte der dritten Proportion geworden. Daher folgt aus ähnlichen Gründen, die im Vorhergehenden bey der Regel Quinque angezeigt sind, die Richtigkeit dieser Rechnung nach der andern Art.

2) Wenn in den Gliedern der Verhältnisse, welche in einander multiplicirt werden, einerley Zahl in einem vorhergehenden und nachfolgenden Gliede vorkommt, so kann dieselbe bey der Multiplication weggelassen werden, und wenn zwey solche Glieder durch einerley Zahl ohne Rest dividirt werden können, so können sie, wenn sie gleich nicht zu einerley Verhältniß gehören, wirklich dividirt, und die dadurch gefundenen Quotienten anstatt der Glieder selbst gesetzt werden. Z. B. In dem vorigen Exempel kann anstatt 2:10 gesetzt werden 1:5, anstatt 3:6 kann gesetzt werden 1:2, und anstatt 8:12 kann 2:3 gesetzt, und alsdenn in beyderley Gliedern 2 weggelassen werden, daß also die zusammengesetzte erste Verhältniß 1 zu 15 wird. Eben diese Abkürzung gilt auch von der vorhergehenden Regel von Fünfen.

2) Es giebt ein Capital von 560 Rthlr. welches auf 5 pro Cent ausgethan worden, in 2 Jahren 57 Rthlr. Interesse, wieviel giebt ein Capital von 2520 Rthlr., welches auf 6 pro Cent ausgethan worden, in 5 Jahren Interessen? Die Rechnung selbst ist nach der zweyten Art folgende:

560 Rthlr.	: 2520 Rthlr.		oder 2	: 9
5 pr. C.	: 6 pr. C.		1	: 3
2 Jahr	: 5 Jahr.			
			2	: 27 = 56
5600	: 75600 = 56 : 756 Rthlr.		oder 1	: 27 = 28 : 756 Rthlr.

Anmerk. Hier konnten in den Gliedern der Verhältnisse, welche in einander multiplicirt werden, 5 pro Cent und 5 Jahr weggelassen, anstatt 2 Jahr und 6 pro Cent kann gesetzt werden 1:3, und endlich 2:9 anstatt 560:2520, weil beyde Zahlen durch 280 ohne Rest dividirt werden können, und die Quotienten 2 und 9 sind u. s. w.

3) Es enthalten 2 gute Groschen 3 Mariengroschen, 1 Gulden enthält 16 gute Groschen, 2 Thaler 3 Gulden, und 4 Ducaten 11 Thaler, wieviel Mariengroschen sind in einem Ducaten enthalten? Die Rechnung selbst ist nach der andern Art folgende:

2 Ggr.	:	3 Mgr.
1 Fl.	:	16 Ggr.
2 Rthlr.	:	3 Fl.
4 Ducaten	:	11 Rthlr.
16	:	1584 = 1 Ducaten : 99 Mgr.

bb) Beyspiele der **umgekehrten Kettenregel.**

1) Es können mit 2 Pflügen in 3 Tagen 9 Morgen Acker umgepflügt werden, wenn täglich 8 Stunden dazu angewandt werden sollen, wieviel Pflüge werden erfordert, wenn 135 Morgen in 6 Tagen umgepflügt, und dazu täglich 12 Stunden angewandt werden sollen? Die Rechnung selbst ist nach der andern Art folgende:

9 Morgen	:	135 Morgen.
6 Tage	:	3 Tage.
12 Stunden	:	8 Stunden.
648	:	3240 = 2 Pflüge : 10 Pflüge.

Anmerk. Hier mußte in der ersten Verhältniß die kleinere Zahl in das vorhergehende, in den beyden andern aber in das nachfolgende Glied gebracht werden, weil die Anzahl der erforderten Pflüge nach der Menge der Morgen steigt, nach der Menge der Tage und Stunden aber, in welchen gepflügt wird, abnimmt.

2) Es können 6 Arbeiter einen Graben, der 4 Fuß breit und 2 Fuß tief ist, in 3 Tagen 40 Fuß weit fortführen, wie weit werden 20 Arbeiter einen Graben, der 6 Fuß breit und 5 Fuß tief ist, in 4 Wochen fortführen? Die Rechnung selbst ist nach der andern Art folgende:

6 Arbeiter	:	20 Arbeiter.
6 Fuß Breite	:	4 Fuß Breite.
5 Fuß Tiefe	:	2 Fuß Tiefe.
3 Tage	:	24 Tage.
540	:	3840 = 40 Fußlänge : 284 4/5 Fußlänge.

c) Beyspiele der **Gesellschafrsrechnung**, und zwar

aa) der **eigentlichen Gesellschafrsrechnung**, davon

a) überhaupt zu bemerken, daß 1) die zusammengelegten Gelder oder andere Sachen in eine Summe gebracht, 2) diese

2) diese Summe mit dem Eingelegten eines jeden von der Gesellschaft und dem Gewinn oder Verlust in so viele Proportionen gebracht, als zu der Gesellschaft Leute gehören, und 3) in einer jeden dieser Proportionen das vierte Glied gesucht werden müsse. Diese vierten Glieder geben den Gewinn oder Verlust eines jeden nach dem Verhältniß dessen, was er eingelegt hat.

b) Insonderheit

aaa) Beyspiele der **einfachen** Gesellschaftsrechnung, wenn bey dem Eingelegten keine verschiedene Zeiten bestimmt worden.

1) Es legen drey Kaufleute eine gewisse Summe zusammen, nemlich der eine giebt 1000 Rthlr. der andere 800 Rthlr. der dritte 200 Rthlr. und gewinnen damit 500 Rthlr. wieviel gebührt einem jeden von diesem Gewinn? Die Rechnung selbst ist folgende:

Der erste hat eingelegt 1000 Rthlr.
Der andere — 800 —
Der dritte — 200 —

Summe 2000 Rthlr.

2000 Rthlr. : 1000 Rthlr. = 500 Rthlr. : 250 Rthlr. Gewinn des ersten.
2000 Rthlr. : 800 Rthlr. = 500 Rthlr. : 200 Rthlr. Gewinn des andern.
2000 Rthlr. : 200 Rthlr. = 500 Rthlr. : 50 Rthlr. Gewinn des dritten.

Anmerk. Die Probe dieser Rechnung ist diese, daß die gefundenen Zahlen, welche den Gewinn oder Verlust eines jeden geben, in eine Summe gebracht werden. Diese muß dem ganzen gegebenen Gewinn oder Verlust gleich seyn. Z. B. Hier ist die Summe der drey gefundenen Zahlen 250, 200 und 50 gleich 500, welches der gegebene ganze Gewinn war.

2) Es pachten 4 Fleischer eine Wiese für 62 Rthlr. und weiden darauf ihre Schaafe, der eine hat 60 Stück, der andere 46, der dritte 30, der vierte 24; wieviel muß ein jeder zu dem Pachtgelde geben? Die Rechnung selbst ist folgende:

Der erste hat 60 Stück Schaafe
Der andere : 46 —
Der dritte : 30 —
Der vierte : 24 —

Summe 160

160:60=62 rthlr.:23 rthlr. 6 ggr. Pacht des ersten.
160:46=62 rthlr.:17 rthlr. 19$\frac{4}{5}$ ggr. Pacht des andern.
160:30=62 rthlr.:11 rthlr. 15 ggr. Pacht des dritten.
160:24=62 rthlr.: 9 rthlr. 7$\frac{1}{5}$ ggr. Pacht des vierten.

3) Es stirbt ein Schuldner, dem 5 Gläubiger Geld geliehen haben, nemlich der erste 2000 Rthlr. der andere 1460 Rthlr. der dritte 520 Rthlr. der vierte 150 Rthlr. der fünfte 70 Rthlr. und hinterläßt nur 2154 Rthlr. wieviel wird ein jeder Gläubiger von seinem Gelde wieder bekommen? Antwort: der erste 1025 Rthlr. 17 Ggr. 1$\frac{5}{7}$ Pf. der andere 748 Rthlr. 18 Ggr. 6$\frac{6}{7}$ Pf. der dritte 266 Rthlr. 16 Ggr. 5$\frac{1}{7}$ Pf. der vierte 76 Rthlr. 22 Ggr. 3$\frac{3}{7}$ Pf. der fünfte 35 Rthlr. 21 Ggr. 7$\frac{1}{7}$ Pf.

4) Es kaufen 3 Gärtner 5 Schock junge Bäume, welche alle von gleicher Güte sind; der eine hat dazu 50 Rthlr. der andere 25 Rthlr. der dritte 10 Rthlr. gegeben, wieviel Bäume wird ein jeder bekommen? Antwort: der erste bekommt 177, der andere 88, der dritte 35.

bbb) Beyspiele der **doppelten** Gesellschaftsrechnung, wenn bey dem Eingelegten verschiedene Zeiten bestimmt werden, welche Zeiten vorher mit dem Eingelegten, darauf sie sich beziehen, multiplicirt werden müssen.

1) Es legen drey Kaufleute eine gewisse Summe zusammen, der erste giebt 800 Rthlr. auf 4 Monat, der andere 600 Rthlr. auf 6 Monat, der dritte 200 Rthlr. auf 3 Monat, und gewinnen dadurch 150 Rthlr. wieviel bekommt ein jeder von dem Gewinn? Die Rechnung selbst ist folgende:

800 × 4 = 3200
600 × 6 = 3600
200 × 3 = 600

Summe 7400

7400:3200=150 Rthlr.:64$\frac{3}{7}$ Rthlr. Gewinn des ersten.
7400:3600=150 Rthlr.:72$\frac{6}{7}$ Rthlr. Gewinn des andern.
7400: 600=150 Rthlr.:12$\frac{6}{7}$ Rthlr. Gewinn des dritten.

2) Es pachten drey Fleischer eine Wiese für 60 Rthlr. und weiden darauf ihre Schaafe, der eine hat 50, der andere

dere 30, der dritte 20 Stück. Der erste läßt sie 4, der andere 6, der dritte 3 Wochen lang darauf gehen, wieviel muß ein jeder zu dem Pachtgelde geben? Antwort: der erste 27 Rthlr. $6\frac{6}{11}$ Ggr. der andere 24 Rthlr. $13\frac{1}{11}$ Ggr. der dritte 8 Rthlr. $4\frac{4}{11}$ Ggr.

bb) Beyspiele der **Vermischungsrechnung**, welche auf eben die Weise, wie die vorhergehenden gerechnet werden können, wenn nur die Gewichte oder Werthe der einzelnen Materien, welche zu vermischen sind, als etwas eingelegtes und eine gegebene Menge oder Größe des Vermischten als ein Gewinn oder Verlust betrachtet wird.

1) Es werden zum Schießpulver auf 1 Pfund Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel erfordert, wieviel muß von jeder dieser Materien genommen werden, wenn man 50 Pfund Pulver machen will? Die Rechnung selbst ist folgende:

Salpeter 32 Loth.
Kohlen 6 Loth.
Schwefel 4 Loth.

Summe 42 Loth.

$42 : 32 = 50 : 38\frac{2}{11}$ ℔ Salpeter.
$42 : 6 = 50 : 7\frac{3}{21}$ ℔ Kohlen.
$42 : 4 = 50 : 4\frac{16}{21}$ ℔ Schwefel.

Anmerk. Die Probe ist hier wieder, daß die Summe der gefundenen Menge von jeder Materie der ganzen gegebenen Menge gleich seyn muß. Z. B. Hier ist die Summe von $38\frac{2}{21}$, $7\frac{3}{21}$, $4\frac{16}{21}$ gleich 50.

2) Es soll 14löthiges und 9löthiges Silber so vermischt werden, daß man 10 Mark 12löthiges bekomme, wieviel muß von jeder Gattung genommen werden? Hier muß man 12 erst von 14, ingleichen 9 von 12 subtrahiren; die Differenzen sind 2 und 3, die Summe derselben 5: alsdenn wird geschlossen, wie die Summe der Differenzen 5 zu der ersten Differenz 2, also 10 Mark zu 4 Mark 9löthigen Silber. Ferner, wie diese Summe 5 zu der andern Differenz 3, also 10 Mark zu 6 Mark 14löthigen Silber.

cc) Bey-

cc) Beyspiele der **Falsi-Rechnung**, welche wieder auf eben die Weise, wie die Beyspiele der eigentlichen Gesellschaftsrechnung, gerechnet werden können, wenn nur anstatt der unbekannten Größen des Eingelegten Zahlen gesetzt werden, welche gegen einander die gegebenen Verhältnisse haben.

1) Es soll ein Gewinn von 200 Rthlr. unter drey Kaufleute getheilt werden, davon der eine zu der Summe, daraus dieser Gewinn entstanden, soviel als die beyden andern zusammen, der andere aber noch einmal soviel als der dritte gegeben; wieviel wird ein jeder von dem Gewinn bekommen, wenn derselbe nach der Verhältniß des Eingelegten zu theilen ist. Hier werden zuerst drey willkührliche Zahlen angenommen, welche die gegebenen Verhältnisse des Eingelegten gegen einander haben, davon nemlich die erste so groß, als die beyden andern zusammen genommen, und die andere noch einmal so groß ist, als die dritte; z. B. 3 2 1, oder 6 4 2, oder 30 20 10. Die Verhältnisse dieser Zahlen sind diejenigen, nach welchen der Gewinn getheilt werden muß; denn die erste ist so groß als die beyden andern zusammen, die andere aber noch einmal so groß als die dritte. Man sucht daher ferner die Summe dieser Zahlen; und schließt sodann, wenn z. B. die Zahlen 3 2 1 gewählt sind, deren Summe 6 ist, folgendergestalt: Wenn der ganze Gewinn 6 wäre; so wäre der Gewinn des ersten 3, wie groß ist der Gewinn des ersten, wenn der ganze Gewinn 200 ist? u. s. w. Die Rechnung selbst ist folgende:

Angenommener Gewinn des ersten 3
des andern 2
des dritten 1

Summe 6

6 : 200 = 3 : 100 Rthlr. Gewinn des ersten.
6 : 200 = 2 : 66 $\frac{2}{3}$ Rthlr. Gewinn des andern.
6 : 200 = 1 : 33 $\frac{1}{3}$ Rthlr. Gewinn des dritten.

2) Es

2) Es soll eine Belohnung von 500 Rthlr. unter 4 Personen dergestalt ausgetheilt werden, daß der erste dreymal so viel als die drey andern zusammen, der andere doppelt so viel als die beyden letzten, von diesen aber jeder gleichviel bekomme; wieviel bekommt ein jeder? Hier können folgende Zahlen angenommen werden, 18, 4, 1, 1; denn die erste ist dreymal so groß als die drey andern zusammen, die andere ist doppelt so groß als die beyden letzten, und diese sind einander gleich. Die Summe dieser Zahlen ist 24, und die übrige Rechnung ist folgende:

24 : 18 = 500 Rthlr. : 375 Rthlr. Belohnung des ersten.
24 : 4 = 500 Rthlr. : $83\frac{1}{3}$ Rthl. Belohnung d. zweyten
24 : 1 = 500 Rthlr. : $20\frac{5}{6}$ Rthl. Belohnung des dritten (und vierten.

3) Es soll eine Zahl gefunden werden, die zu ihrer Hälfte, Drittel und Viertel addirt 60 zur Summe giebt. Hier kann man annehmen, die gesuchte Zahl sey 12, die Hälfte davon ist 6, der dritte Theil 4, der vierte Theil 3, die Summe dieser Zahlen ist 25; folglich hat man nicht die richtige Zahl getroffen. Indessen kann man dieselbe finden, wenn man schließt, wie 25 zu 60, also die angenommene Zahl 12 zu der gesuchten $28\frac{4}{5}$, denn von dieser Zahl ist die Hälfte $14\frac{2}{5}$, der dritte Theil $9\frac{3}{5}$, der vierte Theil $7\frac{1}{5}$, diese Theile aber geben zu der Zahl $28\frac{4}{5}$ selbst addirt eine Summe von 60.

Anmerk. Diese Beyspiele können auch auf eine leichtere Art durch Hülfe der Algebra aufgelöst werden.

Das vierte Capitel.

Von der Geometrie, und den logarithmischen und trigonometrischen Rechnungen.

1. Was ist die Geometrie?

Die Wissenschaft von der Ausmessung des Raums.

2. Wie vielerley Ausmessungen sind bey dem Raume möglich?

Es kann 1) ein Raum zu messen seyn, bey welchem bloß eine **Ausdehnung nach der Länge** statt findet. Dergleichen ist die Entfernung zweener Oerter von einander, die Breite eines Flußes, die Länge eines Hauses, der Umfang einer Stadt, und dergl. Ein solcher Raum, der bloß lang ist, heißt eine **Linie**. Es kann 2) ein Raum zu messen seyn, bey welchem bloß eine **Ausdehnung nach der Länge und Breite** statt findet. Dergleichen ist der Raum, den die Oberfläche eines Gartens, eines Feldes, u. dergl. einnimmt, der Platz, auf welchem eine Stadt, ein Dorf, ein Haus ꝛc. gebaut werden soll, u. dergl. Ein solcher Raum, der bloß lang und breit ist, heißt eine **Fläche**. Es kann endlich 3) ein Raum zu messen seyn, bey welchem eine **Ausdehnung nach der Länge, Breite und Höhe**, (oder Tiefe oder Dicke) statt findet. Dergleichen ist der Raum, den ein Haus, eine Mauer, ein Wall, ein Gefäß, und überhaupt ein jeder physikalischer Körper einnimmt. Ein solcher Raum, der lang, breit und hoch (oder tief oder dick) ist, heißt ein **geometrischer Körper**.

Anmerk.

Anmerk. 1) Ein geometrischer Körper ist nach allen Seiten ausgedehnt, die äussersten Gränzen, welche denselben einschließen, sind Flächen, die Gränzen der Flächen sind Linien, die Gränzen der Linien heißen geometrische oder mathematische Puncte, bey welchen also auch keine Ausdehnung nach der Länge, folglich gar keine Größe statt findet. So gewiß es ist, daß bey einer jeden Linie Gränzen gedacht werden können, so wahr ist auch der Begrif des geometrischen Puncts, und man muß die Richtigkeit dieses Begrifs zugeben, sobald man den richtigen Begrif von dem hat, was hier Gränze heißen muß. Die Schwierigkeit, die man bey dem Begrif des Punctes findet, entsteht gewöhnlich daher, daß man von dem Punct eine sinnliche Vorstellung, wie von Linien, Flächen und Körpern, verlangt, welches aber dem Begrif desselben zuwider ist.

2) Linien können nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen, und Körper nur durch Körper gemessen werden. Wenn die Entfernung zweener Oerter von einander durch Stunden angegeben wird, so wird nicht eigentlich die Stunde, sondern der Weg, der in der Zeit von einer Stunde zurückgelegt werden kann, zum Maaß der Entfernung angenommen.

3) Eine Größe ausmessen heißt in der Geometrie, den Raum ausmessen, welchen die Größe einnimmt. Daher sind Größen, z. B. zwo Kugeln von verschiedener Materie, ohnerachtet ihrer übrigen Verschiedenheit von einander, geometrisch gleich, wenn sie gleich große Räume einnehmen. Die vornehmsten Untersuchungen in der Geometrie, durch welche man in den Stand gesetzt wird, die Regeln zu finden, einen jeden Raum auszumessen, betreffen die Frage, woraus zu beurtheilen sey, ob Größen einander gleich oder ungleich sind? und im Fall sie ungleich sind, welche Verhältniß sie zu einander haben?

4) Die Zeichen der Gleichheit und der Verhältnisse sind aus der Arithmetik bekannt, wo zugleich gezeigt ist, wie die Verhältnisse solcher Größen, die nicht durch Zahlen ausgedruckt sind, zu bestimmen, und woraus die Gleichheit solcher Verhältnisse zu beurtheilen sey. Um anzuzeigen, welche von zween ungleichen Größen die größere oder kleinere sey, bedient man sich des Zeichens $>$ dergestalt, daß die Oefnung desselben dem Ausdruck der größern, und die Spitze dem Ausdruck der kleinern Größe zugekehrt ist. Z. B. $16 > 14$ bedeutet, daß 16 größer als 14 ist; $\frac{1}{4} < 1$ bedeutet, daß $\frac{1}{4}$ kleiner als 1 ist.

5) Zuweilen sind Größen dergestalt gleichförmig ausgedehnt, daß, wenn sie in eben denselben Raum zusammengebracht werden könnten, ihre Gränzen genau zusammenfallen würden; (z. B. die Kreise Tab. I. Fig. 3. und 13). In diesem Fall sagt man, sie decken einander, oder sie passen

passen in einander. Gröſsen, die einander decken, sind allemal einander gleich, aber nicht alle gleiche Gröſsen können einander decken. Zum Beyspiel dient Fig. 36.

3. Wie können die Linien eingetheilt werden?

In **gerade** und **krumme** Linien. Was eine gerade Linie sey, ist bekannt. Eine krumme Linie Fig. 2. ist eine solche, in welcher kein Theil gerade ist.

Anmerk. 1) Zwischen jede zween Puncte kann man sich eine gerade Linie vorstellen, welche allemal der kürzeste Weg von dem einen Punct zum andern ist. Daher werden Entfernungen zweener Puncte von einander auf ebenen Flächen durch gerade Linien gemessen.

2) Die Lage einer geraden Linie wird durch jede zween Puncte derselben völlig bestimmt, daher eine gerade Linie gewöhnlich durch zween Buchstaben benannt wird, welche auf zween Puncten derselben stehen. Z. B. AB, CD, Fig. 4.

3) Eine jede gerade Linie kann an ihren beyden Endpuncten, wenigstens in der Vorstellung, ohne Ende verlängert werden.

4) Gerade Linien, welche einander gleich sind, decken auch einander, und gerade Linien, die nicht einander decken, sind ungleich.

4. Welches ist die vornehmste krumme Linie?

Die **Kreislinie** (**Cirkellinie**), welche entsteht, wenn eine gerade Linie AC (Fig. 3.) um einen Punct C, in welchem sie fest ist, in einer ebenen Fläche herumgeführt wird. Der Endpunct A beschreibt während seiner Bewegung die Kreislinie ADFBA.

Anmerk. 1) Der von der Kreislinie eingeschlossene Raum heiſst die **Kreis-** oder **Cirkelfläche**, oder ein **Kreis** oder **Cirkel**. Der feste Punct C liegt in der Mitte des Kreises, und alle Puncte der Kreislinie sind von demselben gleichweit entfernt. Er heiſst daher der **Mittelpunct**. Die Kreislinie, insofern sie die Gränze des Kreises ist, wird der **Umkreis** oder **Umfang** (**Peripherie**) desselben, und jedes Stück des Umkreises, z. B. **EFG** ein **Bogen** genannt. Die gerade Linie AC, deren Endpunct A die Kreislinie beschreibt, oder überhaupt eine jede gerade Linie, die vom Mittelpunct nach einem Punct des Umkreises gezogen werden kann, heiſst der **Halbmesser** (**Radius**) des Kreises. Eine gerade Linie von einem Punct des Umkreises zum andern

dern, z. B. EG heißt eine Sehne (Chorde), und eine Sehne, welche durch den Mittelpunct geht, z. B. BD, ein Durchmesser (Diameter) des Kreises.

2) Ein jeder Durchmesser besteht aus zween Halbmessern. Alle Halbmesser eines Kreises, folglich auch alle Durchmesser desselben, sind einander gleich; auch sind Kreise, die mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, einander gleich, und decken einander. Kreise von ungleichen Halbmessern sind ungleich.

3) Jede Sehne theilt nicht nur den Umkreis in zween Bogen, sondern auch den Kreis selbst in zween Theile, deren jeder ein Abschnitt (Segment) des Kreises genannt wird. In Fig. 3. sind die Bogen EAG, EFG, Bogen der Sehne EG, und die von diesen Bogen und der Sehne begränzten Theile des Kreises EAGE, EFGE, sind Abschnitte desselben. Auch theilen jede zween Halbmesser wie BM, GM Fig. 22. die Kreisfläche gleichfalls in zween Theile BAGMB und BMGECB, deren jeder ein Ausschnitt (Sector) des Kreises genannt wird. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwo gleiche Hälften, welche zugleich Abschnitte und Ausschnitte sind, und einander decken.

4) In einerley oder gleichen Kreisen gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bogen und Abschnitte, und umgekehrt zu gleichen Bogen gleiche Sehnen und Abschnitte. Wenn in Fig. 3. EG = HI, so ist der Bogen EFG dem Bogen HAI und der Bogen EAG dem Bogen HFI gleich ꝛc. Es sind aber in einerley oder gleichen Kreisen nur diejenigen Sehnen einander gleich, welche vom Mittelpunct gleich weit entfernt sind; je größer diese Entfernung ist, desto kleiner sind die Sehnen.

5. Wie entsteht ein Winkel?

Wenn zwo Linien in einem Punct zusammentreffen; so machen sie einen Winkel mit einander.

Z. B. Die beyden Linien AC, CB Fig. 6., welche in dem Punct C zusammentreffen, oder sich durchschneiden, machen einen Winkel x oder ACB. Dergleichen Winkel sind in den Ecken eines Gartens, Feldes, und dergl. In dem Ausschnitt eines Kreises Fig. 22. machen die Halbmesser ebenfalls einen Winkel u. s. w.

Anmerk. 1) Der Punct C Fig. 6., darin beide Linien zusammentreffen, heißt die Spitze des Winkels, die Linien AC und CB selbst aber werden die Schenkel desselben genannt. Die Winkel werden zuweilen blos durch einen Buchstaben, der an der Spitze steht, häufiger jedoch, um Zweydeutigkeiten zu vermeiden, mit drey Buchstaben bezeichnet, deren einer an der Spitze, und die beyden andern an irgend einem andern Puncte der Schenkel stehn, wobey

zu merken, daß der Buchstabe an der Spitze in der Benennung des Winkels allemal in der Mitte stehn muß. Z. B. der Winkel in Fig. 6. wird der Winkel ACB oder BCA genannt, aber nicht BAC ꝛc. Uebrigens machen die Linien AC, CB eigentlich auf ihren beiden Seiten, folglich überhaupt zween Winkel mit einander, nemlich x und y, wovon aber gemeiniglich nur der erste betrachtet wird. Doch kommen auch zuweilen z. B. bey Ausmessung eines Feldes, Waldes u. dergl. Winkel, wie y, vor; dergleichen ist auch der Winkel des Ausschnitts BMGECB Fig. 22. und der Winkel B Fig. 42**.

2) Bey Bestimmung der Größe eines Winkels kann nicht auf die Länge der Schenkel, sondern nur auf ihre Lage gegen einander gesehen werden, und es wird die Größe eines Winkels nur dadurch geändert, daß einer oder beide Schenkel in eine andere Lage gegen einander gebracht, nicht aber dadurch, daß sie länger oder kürzer gemacht werden. Z. B. Wenn in Fig. 25. der Schenkel CD des Winkels BCD bis nach A und weiter verlängert wird; so bleibt die Lage der beiden Schenkel gegen einander, folglich auch die Größe des Winkels ungeändert. Wenn aber CD um den Punct C, z. B. bis in Cd gedreht wird; so ist die Lage dieses Schenkels gegen den andern, folglich auch die Größe des Winkels verändert.

3) Zween oder mehrere Winkel sind demnach einander gleich, wenn ihre Schenkel einerley Lage gegen einander haben; z. B. die Winkel ACB, ACD Fig. 7. werden gleich seyn, wenn AC gegen BC nicht mehr und nicht weniger geneigt ist, als gegen CD; dagegen sind Fig. 8. die Winkel ACB, ACD gewiß ungleich. Ob ein Winkel größer oder kleiner als ein anderer, oder ihm gleich sey, läßt sich nicht anders, als durch Vergleichung desselben mit einem Maaß, welches gleichfalls ein Winkel seyn muß, bestimmen, wovon in der Folge gehandelt werden wird. Vorläufig ist hier folgendes zu merken. Wenn zween Winkel, wie in Fig. 21. ACB, DCB dergestalt in einander liegen, daß sie eine gemeinschaftliche Spitze C und einen gemeinschaftlichen Schenkel BC haben, auch ihre andern Schenkel auf einerley Seite dieses Schenkels BC liegen; so ist der Winkel BCD, dessen Schenkel CD zwischen die Schenkel des andern Winkels AC, BC fällt, kleiner als dieser andere Winkel ACB, und dieser ist größer. Fiele aber CD genau mit AC zusammen, so würden, wenn gleich die Endpuncte der Schenkel nicht zusammenfallen, beide Winkel einander decken und gleich seyn.

4) Die Winkel ACD, DCB Fig. 21. machen zusammen den Winkel ACB aus, d. i. ihre Summe ist der Winkel ACB. Ueberhaupt erhellt hieraus, wie man sich die Winkel in eine gemeinschaftliche Spitze gebracht, und mit ihren

Schen-

Schenkeln an einander gefügt vorstellen müsse, wenn ihre Summe genannt wird, oder gefunden werden soll. So ist Fig. 25. der Winkel BCa die Summe der drey Winkel BCA, ACH, HCa. In Fig. 8. ist die Summe der beyden Winkel BCA, ACD die gerade Linie BCD, die daher auch als ein Winkel angesehn werden kann, dessen Schenkel BC und CD in einem Punct C zusammentreffen. Auch erhellt, was unter Hälfte, Drittel, Viertel, wie auch unter Vielfachen eines Winkels zu verstehn sey. Wenn in Fig. 21. ACD = DCB; so ist jeder die Hälfte des Winkels ACB, und dieser ist das Doppelte von ACD ꝛc.

2) In einerley oder gleichen Kreisen sind die Ausschnitte gleich, deren Bogen gleich sind, auch sind die Winkel derselben am Mittelpunct gleich; und umgekehrt, wenn die Winkel der Ausschnitte gleich sind, so sind auch die Bogen derselben und die Ausschnitte selbst einander gleich.

6. Wie werden die Winkel eingetheilt?

In rechte, spitze und stumpfe Winkel.

Anmerk. 1) Wenn ein Schenkel CB Fig. 9., CE, AC Fig. 9. eines Winkels ACB über den Scheitelpunct C verlängert wird, so entsteht neben dem vorigen noch ein Winkel ACD. Jede zween dergleichen Winkel heißen Nebenwinkel. Fig. 9. sind ACB und ACD; ACD und DCE; DCE und ECB; ECB und ACB, zusammen vier Paar, Nebenwinkel. Wenn dergleichen Nebenwinkel einander gleich sind, wie Fig. 7., d. i. wenn die Linie AC einerley Lage gegen BC, wie gegen CD hat; so wird jeder dieser Winkel ein rechter Winkel genannt, und die Linien AC, BD heißen senkrechte oder perpendiculaire Linien, nemlich AC ist senkrecht gegen BD, und BD ist senkrecht gegen AC. Dergleichen rechte Winkel sind auch Fig. 25. BCH, HCF. Ungleiche Nebenwinkel, wie ACB, ACD Fig. 8. heißen schiefe Winkel: dergleichen sind auch Fig. 25. ACB, ACF.

2) Alle rechte Winkel sind einander gleich. Daher werden die Winkel gewöhnlich mit rechten Winkeln verglichen, und es pflegt daher ein rechter Winkel kurz mit R bezeichnet zu werden. Z. B. ACB = R bedeutet, daß der Winkel ACB einem rechten Winkel gleich, d. i. ein rechter Winkel sey. 2R bedeutet die Summe von zween, 4R die Summe von vier rechten Winkeln, $\frac{2}{3}$R bedeutet einen Winkel, in welchem der dritte Theil eines rechten Winkels zweymal enthalten ist, u. s. w. Ein schiefer Winkel heißt spitz, wenn er kleiner, und stumpf, wenn er größer ist, als ein rechter Winkel. Fig. 25. ist ACB ein spitzer, aCB ein stumpfer Winkel. Jener ist kleiner, dieser größer, als der rechte Winkel HCB.

3) Die Summe jeder zween Nebenwinkel ist der Summe zween rechter Winkel gleich. In Fig. 8. ist ACB + ACD = 2R. Auch ist überhaupt die Summe aller Winkel, welche über einer geraden Linie liegen, und in derselben eine gemeinschaftliche Spitze haben, der Summe zween rechter Winkel gleich. In Fig. 25. ist BCA + ACd + dCF = 2R.

4) Von zween, oder überhaupt von mehrern Winkeln, deren Summe entweder einem oder der Summe zween oder mehrerer rechter Winkel gleich ist, heißt jeder die Ergänzung oder das Complement des andern, oder überhaupt der übrigen zu einem oder zween, oder der Summe von mehreren rechten Winkeln. In Fig. 25. ist HCD die Ergänzung des Winkels BCD, oder BCD die Ergänzung von HCD zu R; Fig. 8. ist ACB die Ergänzung von ACD, oder ACD die Ergänzung von ACB zu 2R, und Fig. 25. ist jeder der drey Winkel ACB, ACD, dCF die Ergänzung der beyden übrigen zu 2R. Winkel, welche einerley oder gleiche Ergänzung zu R oder 2R haben, sind einander gleich. In Fig. 9. ist ACD die Ergänzung sowol von ACB als von DCE zu 2R, demnach ist ACB = DCE. Winkel, welche gleich sind, haben gleiche Ergänzungen. Wenn in Fig. 4. EFA = EGC so ist auch AFH = CGH u. s. w. Ungleiche Winkel haben ungleiche Ergänzungen, und zwar ist die Ergänzung des größeren Winkels kleiner als die Ergänzung des kleinern. Wenn in Fig. 25. BCD > dCF; so DCH < dCH.

5) Wenn beide Schenkel eines rechten Winkels an der Spitze verlängert werden, wie Fig. 25. die Schenkel des rechten Winkels HCB, so entstehn vier rechte Winkel um diese Spitze, und überhaupt ist die Summe aller Winkel, die um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct liegen, der Summe von vier rechten Winkeln gleich. In Fig. 25. ist ACG + ACa + aCG = 4R.

6) Die senkrechte Linie ist die kürzeste von allen Linien, welche aus einem Punct gegen eine gerade Linie gezogen werden können. In Fig. 20. ist CF die kürzeste von den 5 Linien CA, CM ꝛc. gegen AB. Daher wird die Entfernung eines Puncts von einer geraden Linie durch eine senkrechte Linie bestimmt, welche von diesem Punct auf die gerade Linie gezogen werden kann. In Fig. 25. bestimmen die senkrechten Linien GE, HF die Entfernungen der Puncte G und H der geraden Linie CD von der geraden Linie AB. Wenn auf beyden Seiten einer senkrechten Linie, wie AD Fig. 32., aus einerley Punct derselben A zwo gerade Linien AB, AC, gegen BC so gezogen werden, daß die Entfernungen BD, DC gleich sind, so sind diese Linien einander gleich, nemlich AB = AC; und umgekehrt, wenn AB = AC, und BD = DC; so ist AD auf BC senkrecht.

7) Un-

7) Unter allen geraden Linien, die durch einen Punct, z. B. C Fig. 30. außerhalb einer geraden Linie AD gegen dieselbe gezogen werden können, kann nur eine, CD, gegen diese Linie senkrecht seyn. Unter allen geraden Linien, die durch einen Punct C Fig. 25. in einer geraden Linie BF gezogen werden können, kann gleichfalls nur eine, HC, gegen diese Linie senkrecht seyn.

8) Wenn beyde Schenkel eines Winkels ACB Fig. 9. beym Scheitelpunct verlängert werden; so entstehn allemal 4 Winkel, davon jede zween, die nicht zusammengehörige Nebenwinkel sind, als ACE und DCE, ingleichen ACD und BCE Scheitelwinkel, (Vertikalwinkel) heißen. Scheitelwinkel sind allemal einander gleich, denn sie haben einerley Ergänzung zu 2R.

7. Was sind gleichlaufende oder parallele Linien?

Linien, welche in einerley Fläche liegen, und in derselben, ohne Ende verlängert, niemals zusammenstoßen, sondern beständig gleichweit von einander entfernet bleiben.

Anmerk. Dergleichen sind jede zwo oder mehrere gerade Linien, z. B. AB, CD Fig. 4., welche gegen einerley Linie IK senkrecht stehn. Denn wenn diese Linien verlängert irgendwo in einem Punct zusammenträfen, so würden durch diesen Punct zwo gegen IK senkrechte Linien gehn, welches nicht möglich ist. Imgleichen sind die beyden Kreislinien Fig. 5., welche mit den verschiedenen Halbmessern AC und BC, aber beyde aus einerley Mittelpunkt, beschrieben worden, gleichlaufend, oder, wie man in diesem Fall zu reden pflegt, concentrisch.

2) Das Zeichen der gleichlaufenden Linien ist ∥ z. B. AB∥CD bedeutet: die Linie AB ist der Linie CD gleichlaufend.

3) Wenn zwo gerade Linien wie AB, CD Fig. 4. von einer dritten EH irgendwo in zween verschiedenen Puncten F und G durchschnitten werden, so entstehen dadurch 8 Winkel, nemlich 4 um den Punct F, 4 um G. Von diesen sind, die zwischen AB und CD fallen, innere, die übrigen äußere Winkel. Z. B. AFG, FGD ꝛc. sind innere, EFA, DGH sind äußere Winkel. In Fig. 33. sind die Winkel Abc wegen der durchschneidenden Linie AB, und Acb wegen AC, äußere, und die Winkel bBC, bcC ꝛc. innere Winkel. Von den innern Winkeln heißen jede zween, welche keine gemeinschaftliche Spitze haben, entgegengesetzte Winkel, wenn sie auf einerley Seite, und Wechselswinkel, wenn sie auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden Linie liegen. Z. B. AFG und FGC, Fig. 4., ferner

ner BFG und FGD sind entgegengesetzte, AFG und FGD aber, ferner BFG und FGC sind Wechselswinkel. Fig. 30. sind ECA, CAD zusammengehörige Wechselswinkel wegen der durchschneidenden Linie CA, und FCA, CAD sind zusammengehörige entgegengesetzte Winkel. Wegen CB sind ECB und CBD, ferner FCB und ABC zusammengehörige Wechselswinkel u. s. w. In Fig. 41. sind ABD und BAC zusammengehörige entgegengesetzte Winkel u. s. w.

4) Wenn zwo gleichlaufende Linien, wie AB, CD Fig. 4. durch eine dritte Linie EH durchschnitten werden, so ist 1) jeder äußere Winkel demjenigen innern Winkel gleich, der mit ihm auf einerley Seite der durchschneidenden Linie, aber an der andern gleichlaufenden Linie liegt. Z. B. EFA = FGC, CGH = AFG ꝛc. Auch sind 2) jede zusammengehörige Wechselswinkel einander gleich, AFG = FGD, BFG = FGC, und 3) die Summe jedes Paars entgegengesetzter Winkel ist der Summe zween rechter Winkel gleich. AFG + FGC = 2R; BFG + FGD = 2R. Wenn in Fig. 33. bc # BC, so ist der Winkel Abc = ABC und Acb = ACB. Wenn in Fig. 29. EF # AB; so sind wegen der durchschneidenden Linie CA die Wechselswinkel EAC, CAB; und wegen CB die Wechselswinkel FCB, CBA einander gleich. Wo umgekehrt diese Gleichheit der Winkel statt findet, da sind die durchschnittenen Linien gleichlaufend. Wenn in Fig. 53. die Wechselswinkel CED und CAB, oder CDE und CBA gleich sind; so ist AB # DE.

5) Wenn zwo gerade Linien, wie AC, CB Fig. 30. sich über einer dritten Linie AD durchschneiden; so ist der äußere Winkel CBD größer als der gegenüberstehende innere Winkel CAB.

6) Wenn zwo oder mehrere Linien z. B. Fig. 42*** LD, KE, IF, HG mit einerley andern BC gleichlaufend sind, so sind sie auch unter einander gleichlaufend.

8. Wie wird eine gerade Linie gezeichnet?

1) **Eine kleinere wird nach einem Lineal Fig. 10. vermittelst eines Stifts, Bleyfeder, Schreibfeder, Reißfeder, u. dergl. gezogen.**

Anmerk. In Ermangelung eines Lineals darf man nur ein Blatt Papier nach der Länge zusammenlegen. Die Linien müssen desto feiner gezogen werden, je größere Genauigkeit bey der Zeichnung erforderlich ist, damit sie den wahren geometrischen Linien in ihrer Ausdehnung desto näher kommen. Was übrigens durch die Zeichnung sichtbar gemacht wird,

wird, ist eigentlich nur das Zeichen der Linie; die Linie selbst, d. i. der nach der Länge ausgedehnte Raum war vorher schon da.

2) Eine **größere** wird durch einen ausgespannten Faden, z. B. auf Bauholz, in Gärten ꝛc. oder auf dem Felde nur durch eingeschlagene Stäbe bestimmt.

Anmerk. Zwischen zween eingesteckten Stäben ist allemal eine gerade Linie; sollen nun mehrere Stäbe zwischen beyde in dieselbe gerade Linie gesteckt, oder diese verlängert werden, so müssen diese letztern Stäbe alle so gestellt werden, daß, wenn man hinter einem der äußersten Stäbe in einiger Entfernung steht, dieser alle übrigen deckt. Zur Erläuterung dient Fig. 53. CB.

9. Wie wird eine Kreislinie um einen gegebenen Mittelpunct mit einem gegebenen Halbmesser gezeichnet?

1) Eine **kleinere** wird vermittelst des **Cirkelinstruments**, welches Fig. 11. vorgestellt, und gleichfalls ein **Cirkel** genannt wird, gezogen, indem man die beyden Schenkel desselben so weit öfnet, bis die zwischen ihren Spitzen, welche als geometrische Puncte angesehen werden, befindliche gerade Linie dem gegebenen Halbmesser gleich ist, und hierauf die eine Spitze in den gegebenen Mittelpunct stellt, und die andere um den Mittelpunct so herumführt, daß sie beständig in derselben Fläche bleibt. Diese beschreibt durch diese Bewegung die Kreislinie.

2) Eine **größere** wird vermittelst eines **Stangencirkels** Fig. 12., an welchem die eine stählerne Spitze b in jeder beliebigen Entfernung von der andern a vermittelst einer metallenen Hülse und Schraube c befestigt werden kann, oder auch nur vermittelst einer Schnur Fig. 13., welche in dem gegebenen Mittelpunct C befestigt worden, und an welche man in der gegebenen Weite des Halbmessers Ca einen Stift a anhält, den man bey ausgedehnter Schnur um den

Mittelpunct C in der gegebenen Fläche herumführt, beschrieben.

Anmerk. 1) Es kann also, wenn keine Genauigkeit erforderlich ist, ein Kreis in Ermangelung eines besseren Werkzeuges blos aus einem Stück Holz, durch welches man zween Nägel schlägt, die mit ihren Spitzen auf einerley Seite desselben hervorragen, oder auch einen Nagel und eine Feder durchsteckt, gezogen werden.

2) Eine länglichtrunde oder linsenförmige Linie oder Ellipse kann also gezeichnet werden. Es werden in der gegebenen Fläche zween Stifte A und B Fig. 14. eingeschlagen, deren Entfernung von einander gegeben ist, oder desto größer genommen wird, je länglichter die Ellipse werden soll. Um diese Stifte wird eine um dieselbe bewegliche Schnur gelegt, deren beyde Enden man mit einem Stifte C zusammenfaßt, dieser Stift aber bey ausgedehnter Schnur mit derselben um die beyden Stifte A und B herumgeführt, da denn derselbe die Ellipse beschreibt. Die Puncte A und B heißen die Brennpuncte, die Sehne DE, welche durch die Brennpuncte geht, die große Axe, der Punct F in der Mitte der großen Axe der Mittelpunct, FA, FB die Entfernung des Mittelpuncts von jedem Brennpunct die Excentricität, und die gegen die große Axe senkrechte Linie durch den Mittelpunct GH die kleine Axe der Ellipse.

3) Durch Hülfe des Cirkelinstruments können gerade Linien einander gleich gemacht, wie auch addirt oder von einander subtrahirt werden.

10. Wie wird eine gerade Linie senkrecht gegen eine andere gezogen?

1) Wenn in der gegebenen Linie AB Fig. 10. ein Punct E gegeben ist, über willkührlich angenommen werden darf, durch welchen die senkrechte Linie gezogen werden soll, so werden zuvörderst auf beyden Seiten dieses Puncts in willkührlicher Entfernung zween Puncte der gegebenen Linie, M und N angenommen, welche jedoch von E gleichweit entfernt seyn müssen. Dieses geschieht durch Hülfe des Cirkelinstruments, indem die Schenkel desselben willkührlich geöffnet werden, sodann die eine Spitze in den Punct E gesetzt, und mit der andern Spitze in der geraden Linie AB auf der einen Seite ein Punct M und auf der andern

Seite

Seite mit derſelben Eröfnung der Punct N gezeichnet wird. Aus dem einen Puncte M wird hierauf mit einem willkührlichen Halbmeſſer MC ohngefähr über den Punct E ein Bogen m, und aus dem Punct N mit gleichgroßem Halbmeſſer der Bogen n ſo gezogen, daß beyde Bogen einander durchſchneiden. Die gerade Linie CE, welche aus dem gegebenen Punct E nach dem Durchſchnittspunct der Bogen C gezogen werden kann, iſt die geforderte gegen AB ſenkrechte Linie.

2) Wenn **außerhalb** der gegebenen Linie AB ein Punct C gegeben iſt, durch welchen eine gegen AB ſenkrechte Linie gezogen werden ſoll; ſo wird die eine Spitze des Cirkelinſtruments in den gegebenen Punct C geſetzt, und die Schenkel willkührlich, jedoch ſoweit eröfnet, daß die andere Spitze, jenſeits der Linie AB, z. B. bis nach F, reicht. Hierauf wird mit dem Halbmeſſer CF ein Bogen AFB beſchrieben, welcher die Linie AB in zween Puncten A und B durchſchneidet. Aus dieſen Durchſchnittspuncten werden ſodann mit willkührlichen aber gleichgroßen Halbmeſſern entweder über der gegebenen Linie die Bogen v und s, oder, wenn es bequemer iſt, unter derſelben die Bogen o und r ſo gezogen, daß ſie einander durchſchneiden. Die gerade Linie CE oder CD, welche durch C und die Durchſchnittspuncte der Bogen gezogen werden kann, iſt die geforderte ſenkrechte Linie.

Anmerk. 1) Wenn man über eine gerade Linie AB Fig. 16. einen halben Kreis ACB beſchreibt, und aus den beyden Endpuncten des Durchmeſſers A und B gegen einerley willkührlichen Punct C des Umkreiſes zwo gerade Linien AC, BC zieht, ſo machen dieſe allemal einen rechten Winkel ACB. (S. Fr. 16. Anmerk. 5.) Nach einem alſo gefundenen rechten Winkel können zwey Lineale AC und BC Fig. 17. zuſammengeſetzt werden, welches Inſtrument ein Winkelhaken heiſſet, wornach man hernach ſogleich rechte Winkel zeichnen kann. In Ermangelung deſſelben, und wenn

nicht große Genauigkeit erforderlich ist, kann man auch nur einen Bogen Papier in Quart oder Octav zusammenlegen, und an den gefalteten Seiten Linien ziehen.

2) Wenn man einen schweren Körper, z. B. eine metallene Kugel, oder nur einen Stein an einen dünnen Faden bindet, so hat man ein Instrument, welches ein Bleyloth genannt wird. Wird nun der Faden an dem einen Ende A Fig. 12. so gehalten, daß das Gewicht B frey hängt, so dehnt sich der Faden in einer geraden Linie AB aus, welche gegen die Oberfläche der Erde senkrecht ist, und eine vertikale oder lothrechte Linie genannt wird. Eine gerade Linie CB, welche gegen eine dergleichen lothrechte Linie senkrecht gezogen worden, ist eine horizontale Linie; eine ebene Fläche aber, gegen welche eine lothrechte Linie senkrecht ist, heißt eine horizontale Fläche. Wenn man daher zwey Lineale, wie Fig. 19. zusammensetzt, gegen AB die senkrechte Linie CD zieht, und in C ein Bleyloth befestigt, so hat man eine Wasserwage, vermittelst welcher man untersuchen kann, ob eine Linie oder Fläche horizontal sey. Denn wenn man dieses Instrument mit der Seite AB auf eine Mauer oder dergleichen stellt, und alsdenn findet, daß der Faden des Bleyloths die Linie CD genau bedeckt, indem das Bleyloth frey hängt, so ist man versichert, daß die Mauer horizontal sey. In Ermangelung eines solchen Instruments kann man auch mit einen Winkelhaken Fig. 17. mit der einen Seite CB auf die Mauer stellen, und an AC ein Bleyloth halten.

3) Eine gerade Linie AM, Fig. 21., welche durch einen Punct E des Umfangs eines Kreises senkrecht gegen den durch diesen Punct gehenden Halbmesser CE gezogen werden kann, berührt den Kreis in diesem Punct, ohne ihn zu durchschneiden. Sie heißt daher eine Tangente des Kreises, und der Punct E heißt der Berührungspunct. Durch jeden Punct des Umkreises kann nur eine Tangente gezogen werden.

11. Wie wird einer geraden Linie eine andere gleichlaufend gezogen?

Wenn ein Punct z. B. G Fig. 15. über der gegebenen geraden Linie AB gegeben ist, oder willkührlich angenommen werden darf, durch welchen die gleichlaufende Linie gezogen werden soll; so wird zuvörderst aus demselben eine senkrechte Linie GE auf AB, und hierauf aus einem willkührlichen andern Punct F der AB eine andere senkrechte Linie FH gezogen, und diese

diese der andern GE gleich gemacht. Die gerade Linie CD durch die Puncte G und H ist mit AB gleichlaufend.

Anmerk. 1) Durch Hülfe des Parallellineals können gleichlaufende Linien, wie rechte Winkel durch Hülfe des Winkelhakens, unmittelbar gezogen werden.

2) Wenn durch den Endpunct B Fig. 36. einer geraden Linie BC eine senkrechte Linie gezogen werden soll, und die gegebene Linie über B hinaus nicht verlängert, folglich die vorhin gegebene Vorschrift, senkrechte Linien zu ziehen, nicht ausgeübt werden kann, so darf man nur aus einem willkührlichen andern Punct D der gegebenen Linie eine senkrechte Linie DA und sodenn EF durch B mit DA gleichlaufend ziehen. Diese ist zugleich gegen BC senkrecht.

12. Wie kann eine gerade Linie, oder ein Bogen in zween gleiche Theile getheilt werden?

Es werden aus den beyden Endpuncten A und B Fig. 20. der gegebenen geraden Linie AB, oder des Bogens AFB die Bogen m und n, ingleichen o und r, oder v und s, und zwar jedes Paar dieser Bogen mit willkührlichen, jedoch gleichen Halbmessern, beschrieben; durch die Durchschnittspunete derselben aber wird die Linie CD gezogen, welche die gerade Linie AB oder den Bogen AFB in zween gleiche Theile AE und EB oder AF und FB theilt.

Anmerk. 1) Diese gerade Linie CD, welche die gegebene AB in zween gleiche Theile theilt, steht zugleich auf derselben senkrecht.

2) Ein solche Theilung kann auch durch Versuche mit einem Cirkel oder Faden gemacht werden, welches bey einer Eintheilung des Bogens in eine gegebene Anzahl von Theilen in den mehresten Fällen nöthig ist.

3) Eine gegebene gerade Linie BA Fig. 42*** kann folgendergestalt in eine jede Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile, getheilt werden. Man ziehe aus dem einen Endpunct A der gegebenen Linie unter einem willkührlichen Winkel eine andere gerade Linie AC, und trägt auf dieselbe von A aus mit willkührlicher Eröfnung des Cirkels 5 gleiche Theile AD, DE, EF, FG, GC, zieht darauf von dem letzten Thei-

Theilungspunct C nach dem andern Endpunct B der gegebenen Linie eine gerade Linie BC, und mit dieser durch sämtliche Theilungspuncte der Linie AC die geraden Linien GH, FI, EK, DL gleichlaufend; diese theilen die Linie AB in die fünf gleichen Theile AL, LK, KI, IH, HB. Wenn mit BC auch nur die erste Linie FG gleichlaufend gezogen wird, so kann BH mit dem Cirkelinstrument auf AB fünfmal aufgetragen, und dadurch die Theilung noch leichter vollendet werden. Auf eine ähnliche Art wird bey einer jeden andern geforderten Theilung einer geraden Linie verfahren.

4) Wenn auf die Sehne eines Kreises z. B. EG Fig. 3. aus dem Mittelpunct eine senkrechte Linie gezogen, und dieselbe gehörig verlängert wird, wodurch der Durchmesser AF entsteht, so wird dadurch sowohl die Sehne als ihre Bogen in zween gleiche Theile getheilt, nemlich EK = KG, EF = FG, EA = AG. Und wenn umgekehrt die Sehne durch eine senkrechte Linie in zween gleiche Theile getheilt wird, so geht diese durch den Mittelpunct des Kreises. Endlich ist auch der Halbmesser auf jeder Sehne, durch deren Mitte er geht, senkrecht, und halbirt ihren Bogen.

5) Ein Winkel ACB Fig. 21. kann in zween gleiche Theile getheilt werden, wenn aus der Spitze desselben C mit einem willkührlichen Halbmesser der Bogen EF beschrieben, und dieser durch die Linie CD in zween gleiche Theile getheilt wird, diese theilt zugleich den Winkel ACB in die zween gleiche Winkel ACD und DCB, indem durch diese Theilung des Bogens der Ausschnitt CEF in zween gleiche Ausschnitte getheilt wird.

13. Wie wird der Mittelpunct eines gegebenen Kreises gefunden?

Es werden in dem Umfange des gegebenen Kreises ABCDEFG willkührlich zween Bogen ABC, CDE angenommen, und deren Sehnen AC, CE durch die senkrechten Linien BF, GD halbirt. Der Durchschnittspunct M dieser senkrechten Linien ist der Mittelpunct des Kreises.

Anmerk. Eben so kann zu einem gegebenen Bogen ABCDE der Mittelpunct gefunden, und folglich der Umfang des Kreises, zu welchem dieser Bogen gehört, ergänzt werden. Auch erhellt hieraus, wie zu jeden 3 gegebenen Puncten A, C, E, welche in einer ebenen Fläche und nicht in

in einer geraden Linie liegen, ein Kreis gefunden werden könne, in dessen Umfange diese Puncte liegen. Man sucht nemlich den Mittelpunct eines Kreises, dessen Sehnen AC und CE sind. Durch jede dergleichen drey Puncte kann demnach ein Kreis, aber nur einer, gezogen werden. Zween verschiedene Kreise können nicht drey Puncte gemeinschaftlich haben.

41. Wie wird eine gerade Linie gemessen?

1) Es wird eine gewisse Länge zum Maaßstabe angenommen, und in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile getheilt.

2) Wird durch wiederholte Anlegung des Maaßstabes an die Linie oder Länge, welche gemessen werden soll, gefunden, wie vielmal dieser Maaßstab oder seine Theile in derselben enthalten sind.

Anmerk. 1) Der Maaßstab, womit man die Länge eines Tuchs, Bandes u. dergl. zu messen pflegt, wird eine Elle genannt, welche man wieder in vier gleiche Theile oder Viertel theilt. Bey Gebäuden und auf dem Felde bedient man sich der Ruthe, welche von den Künstlern und Handwerkern in zwölf Werkschuh oder Fuß, und jeder Werkschuh wieder in zwölf Zoll getheilt wird. Zween Werkschuh machen gemeiniglich eine Elle aus; die Feldmesser aber theilen eine Ruthe gewöhnlich in zehn geometrische Fuß oder Schuh, jeden Schuh in zehn Zoll, jeden Zoll in zehn Linien, welche Eintheilungsweise für die Rechnungen bequemer ist. Die Landruthen enthalten 15 oder 16 Fuß, eine Französische Ruthe oder Toise enthält 6 Pariser Fuß. Wenn man den Pariser Fuß in 14400 gleiche Theile, nemlich Hundertel von Linien, eintheilt, indem 1 Fuß 144 Linien hat: so enthält solcher Theile der Fuß zu Amsterdam 12550, zu Anspach 13200, zu Augsburg 13130, zu Berlin 13730, zu Braunschweig 12650, zu Bremen 12830, zu Breslau 12765, zu Brüssel 12900, der Calenbergische Fuß 12990, zu Cleve 13100, zu Cöln 12200, zu Constantinopel 31400, zu Copenhagen 13913, zu Cracau 15800, zu Danzig 12720, zu Dresden 12545, zu Frankfurt am Mayn 12700, zu Genf 21630, der geometrische Fuß 16695,6; zu Gießen 13800, zu Güstrow 12710, zu Halle 13200, zu Hamburg 12700, zu Hannover 12950, im Hollsteinischen 13230, zu Königsberg 12640, zu Leipzig 12510, zu Lion 15150, zu Lissabon 15010, zu London 13516, zu Lübeck 12900, zu Mannheim 12860, zu Maynz 13350, im Mecklenburgischen 12900, zu München 9869, zu Nürnberg 13470, in Pommern 12950, zu Prag 13380, der Rheinländische

Fuß

Fuß 13913, zu Riga 12150, zu Rom 13060, zu Rostock 12820, zu Rotterdam 13850, in Rußland 23860, in Spanien 12530, zu Stettin 12530, zu Stockholm 13160, zu Strasburg 12830, zu Stralsund 12885, zu Ulm 12810, zu Venedig 15400, zu Wien 14200, zu Wittenberg 14850, zu Zürich 13380. Nach diesen Verhältnissen kann man ein gegebenes Maaß leicht in ein anderes durch Hülfe der Regel de Tri verwandeln. Wenn z. B. Pariser Fuße mit Rheinländischen verglichen werden sollen, so folgt aus folgender Proportion.

1 Pariser Fuß : 1 Rhl. Fuß = 14400 : 13913

wenn in derselben das Produkt der äußern Glieder dem Produkt der mittlern gleich gesetzt wird, daß

13913 Par. Fuß = 14400 Rheinländ. Fußen.

Wenn man daher wissen will, wie viel z. B. 100 Pariser Fuß in Rheinländischem Maaß ausmachen, so fragt man: 13913 Pariser Fuß betragen 14400 Rheinländische, wieviel betragen 100 Pariser Fuß in Rheinländischem Maaß? d. i. man schließt:

13913 Par. F. : 100 Par. F. = 14400 Rhl. F. : $103\frac{1}{2}$ Rhl. F.

Wenn die verschiedenen Fuße in gleichviel Zolle, die Zolle in gleichviel Linien getheilt werden; so zeigen die obigen Zahlen auch die Verhältniß der Zolle und Linien der verschiedenen Fuße an.

Denn weil z. B. 1 P. F. : 1 Rhl. F. = $\frac{1}{12}$ P. F. : $\frac{1}{12}$ Rhl. F.

so ist auch $\frac{1}{12}$ P. F. : $\frac{1}{12}$ Rhl. F. = 14400 : 13913 u. s. w.

Das Rheinländische Maaß wird in den Preußischen Landen gemeiniglich beym Feldmessen gebraucht; die halbe Elle aber ist in Berlin länger als der Rheinländische Fuß, und enthält 14780 solcher Theile, deren der Pariser Fuß 14400 hat; die halbe Elle zu Amsterdam enthält 15300, zu Breslau 12765, zu Dresden 12545, zu Frankfurt an der Oder 14705, zu Hamburg 12700, zu Leipzig 12530, zu Magdeburg 14780, in Schlesien 12765, zu Stettin 14485, die halbe Brabanter Elle in Hamburg 15325 solcher Theile. Eine Länge von 24000 Zwölftheiligen, oder 20000 Zehntheiligen Fußen, oder 2000 Ruthen in Rheinländischem Maaße ist eine teutsche Meile, welche aber gemeiniglich etwas kürzer, und zwar von 23642,8 Zwölftheiligen Rheinländischen Fußen, oder 2807,2 französischen Ruthen angenommen wird, weil nach dieser letzten Länge gerade 15 Meilen auf einen Grad des größten Umkreises der Erde gehen, und solche Meilen werden insonderheit geographische Meilen genennet. Eine Französische Meile ist der 25ste, eine Italiänische der 60ste, eine Engländische der 69ste Theil eines solchen Grades.

2) Das angenommene Maaß wird entweder auf einen geraden Stab gebracht, oder es wird eine Schnur, oder Kette, welche daher die Meßkette genannt wird, nach demselben einge-

eingetheilt. Mit derselben wird eine gerade Linie auf dem Felde, z. B. CB Fig. 53. folgendergestalt gemessen. Man befestigt in dem Anfangspunct C der Linie das eine Ende der Meßkette durch einen daselbst eingesteckten Meßstab, spannet hierauf nach der Richtung CB die Meßkette aus, und steckt in der Linie CB in dem Punct, wo das andere Ende der Meßkette zutrift, einen zweyten Stab so ein, daß die Stäbe C und a mit dem Gegenstande in B sich decken. Der Theil Ca der Linie CB beträgt eine Meßkettenlänge. Hierauf befestigt man das eine Ende der Meßkette wieder in a, verfährt daselbst wie vorhin in C, und findet dadurch den Punct b, wo Cb zwo Meßkettenlängen beträgt u. s. w. Wenn die Meßkette, wie gewöhnlich 5 Ruthen lang ist; so würde die Weite von C bis d 15 Ruthen betragen, und wenn db noch 4 Ruthen 6 Fuß gefunden würde, so wäre die Linie CB 19 Ruthen und 6 Fuß lang.

3) Wenn man willkührlich eine kleine gerade Linie annimmt, die man jedoch in eben so viele kleinere Theile eintheilt, als im großen geschieht, so nennt man dies einen verjüngten Maaßstab. Fig. 23. und 24. Nach dem letztern Fig. 24., dessen Einrichtung im Folgenden erläutert werden soll, wird eine gegebene Linie also gemessen: Es wird dieselbe zwischen die Spitzen eines Cirkels gefaßt, und diese alsdenn also in den Maaßstab gesetzt, daß die eine Spitze in eine von den senkrechten, die andere in eine von den schiefen Linien, welche Transversallinien heißen, beyde Spitzen aber zugleich in einerley Parallele treffen; da denn die beygefügten Zahlen die Länge dieser Linie in verjüngten Ruthen, Fußen und Zollen geben. Z. B. Wenn die eine Spitze des Cirkels genau in a, die andere in b fällt, so ist die Länge der dazwischen enthaltenen Linie ab 2 Ruthen 5 Schuh 4 Zoll, die Linie cd ist 3 Ruthen 9 Schuh 1 Zoll. Ein solcher verjüngter Maaßstab kann auf Papier, Holz, Glas oder Messing gezeichnet werden. Anstatt der Transversallinien bedient man sich bey Maaßstäben und andern Meßwerkzeugen auch des Nonius oder Vernier mit großer Bequemlichkeit, dessen Einrichtung sich jedoch nicht ohne Vorzeigung desselben im kurzen leicht deutlich machen läßt.

4) Die Anzahl der Ruthen wird mit (o), der Fuße mit (′), der Zolle mit (″), der Linien mit (‴) bezeichnet. Z. B. 20° 6′ 4″ 8‴ wird gelesen 20 Ruthen 6 Fuß 4 Zoll 8 Linien.

5) Zwo gerade Linien, deren eine mit der Meßkette auf dem Felde, die andere nach einem verjüngten Maaßstabe auf dem Papier gemessen ist, verhalten sich gegen einander, wie diese Maaße, wenn die Zahlen, durch welche ihre Größe nach ihrem Maaßstabe ausgedruckt wird, gleich sind. Z. B. Wenn in Fig. 54. AC eine Linie auf dem Felde, welche 85 Fuß nach der Meßruthe hält, und ac eine Linie auf dem Papier, welche nach dem verjüngten Maaßstabe gleichfalls 85′ beträgt, bedeutet, so verhält sich die Linie auf dem Fel-

de

de AC zu der Linie auf dem Papier ac, wie die Meßkettenruthe zu der verjüngten Ruthe. Denn wenn die Ruthe im verjüngten Maaßstabe z. B. tausendmal kleiner ist, als die Ruthe an der Meßkette; so ist auch ein jedes Zehntel, Hundertel ꝛc., wie auch jedes Vielfache derselben tausendmal kleiner als das Zehntel, Hundertel ꝛc., wie auch das Vielfache der Meßkettenruthe. Der Exponent der Verhältniß ist also gleich. Wenn umgekehrt zwo Linien sich wie die Kettenruthe zur verjüngten Ruthe verhalten, so muß die erste so viel Ruthen, Schuh und Zoll nach der Meßkette betragen, als die andere nach dem verjüngten Maaßstabe. Z. B. Wenn in Fig. 54. AB zu ab sich wie die Kettenruthe zur verjüngten Ruthe verhielte, und ab nach dem verjüngten Maaßstabe 9° betrüge; so würde AB 9 Meßkettenruthen lang seyn.

15. Wie wird der Umfang eines Kreises gemessen?

Es wird der Durchmesser desselben gemessen, und hierauf geschlossen: wie 7 zu 22, oder 100 zu 314, oder 113 zu 355, oder 100000000 zu 314159265, also der gemessene Durchmesser zu einer Zahl, welche, nach der Regel de Tri berechnet, die Größe des Umkreises in Längenmaaß giebt.

Z. B. Ein rundes Stück Feld, welches 20 Ruthen im Durchmesser hat, muß im Umkreise 62 Ruthen 8 Fuß haben; eine Tresse oder Band, so um einen Hut gesetzt, oder ein Stück Eisen, welches um ein Rad gelegt werden soll, muß etwas über dreymal so lang seyn, als der Durchmesser des Huts oder Rades.

Anmerk. 1) Die Durchmesser haben nemlich zu ihrem Umfange bey allen Kreisen einerley Verhältniß, so daß, wenn z. B. ein Durchmesser eines Kreises zweymal, dreymal ꝛc. größer oder kleiner als der Durchmesser eines andern Kreises ist, auch der Umfang des ersten Kreises eben so vielmal größer oder kleiner ist, als der Umfang des andern Kreises.

2) Die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise ist eigentlich irrational, daher die hier angegebenen Verhältnisse nicht genau einander gleich sind, und es kann die Größe des Umfangs eines Kreises eigentlich nur beynahe gefunden werden, und zwar mehr oder weniger genau, je nachdem die eine oder die andere Verhältniß gewählt wird, auch der Durchmesser kleiner oder größer ist. Die Verhältniß

113:355 ist genauer als 7:22 oder 100:314; noch genauer ist die vierte Verhältniß, die nach folgendergestalt ausgedrückt werden kann: 1:3, 14159265 . . . und den Umkreis bis auf Tausendmillionentheile des Durchmessers gewan giebt, welche Genauigkeit aber in den mehresten Fällen unnöthig ist. Gleichwol ist diese Verhältniß überhaupt genau bis auf 127 Decimalstellen gefunden worden. Bis auf 32 Stellen ist sie folgende:

1:3,141592 6535589 7932384 6264338 3279 50 .

3) Der Halbmesser hat zum halben Umkreise dasselbe Verhältniß, welches der Durchmesser zum ganzen Umkreise hat. Zum ganzen Umkreise aber verhält sich der Halbmesser wie 1:2X3,14159 . . . d. i. wie 1:6,28318 . . .

4) Wenn in einem Kreise, wie Fig. 25., zween Durchmesser EF, HG senkrecht auf einander gezogen werden, so wird derselbe dadurch in vier gleiche Ausschnitte getheilt. Wird in einem derselben FCG die Sehne FG gezogen, und in 5 gleiche Theile getheilt; so findet man eine gerade Linie, welche dem Umfange des Kreises bis auf Zehntausendtheile des Durchmessers genau gleich ist, indem man den Durchmesser EF dreymal nimmt, und zu demselben den fünften Theil Fh der Sehne FG addirt.

5) Wenn bekannt ist, der wievielste Theil des Umfangs ein Bogen ist, so erhellt aus dem bisherigen leicht, wie die Größe desselben aus der Größe des Umkreises durch Rechnung ebenfalls gefunden, auch derselbe durch Zeichnung in eine gerade Linie verwandelt werden könne.

6) Wenn der Umfang eines Kreises bekannt ist, so kann dessen Durchmesser gefunden werden, indem man eine der oben angezeigten Verhältnisse umkehrt, und z. B. schließt: Wie 314 zu 100, also der gegebene Umkreis zu dem gesuchten Durchmesser. Wenn der Umfang eines Kreises 5400 Meilen beträgt, so wird sein Durchmesser, gleichfalls in Meilen, durch folgende Proportion gefunden:

314:100 = 5400:vierte Pr. 3.

da 1719 Meilen herauskommen.

16. Wie wird die Größe eines Winkels gemessen?

Es wird aus der Spitze des gegebenen Winkels ACB Fig. 25. mit einem willkührlichen Halbmesser EC eine Kreislinie EDFG beschrieben. Diese wird durch den Durchmesser EF in zween gleiche Theile EHF und EGF, jede Hälfte wieder in drey gleiche Theile, jedes Drittel wieder in drey, jeder solcher Theil wieder in zween, und jeder dieser zween Theile wieder

in zehn gleiche Theile getheilt, daß also der ganze Umkreis 360 gleiche Theile bekomme, welche Grade heissen, deren jeder wieder in 60 Minuten, und jede Minute wieder in 60 Secunden eingetheilt wird. Die Anzahl solcher Theile, welche auf den Bogen ED kommen, geben die Größe des Winkels ACB, und wenn diese Anzahl z. B. 44 Grade des Umkreises beträgt; so sagt man, der Winkel habe gleichfalls 44 Grade.

Anmerk. 1) Wenn gegen den Durchmesser EF Fig. 25. ein anderer GH senkrecht gezogen wird; so entstehen um den Mittelpunct vier gleiche, nemlich rechte Winkel, und auch der Umfang des Kreises wird dadurch in vier gleiche Bogen, welche Quadranten genannt werden, getheilt. Jeder Quadrant hält also 90 Grade. Wenn aus allen 90 Theilungspuncten eines jeden Quadranten gerade Linien nach dem Mittelpunct des Kreises gezogen werden, so entstehen dadurch 360 gleiche Ausschnitte, folglich auch 360 gleiche Winkel um den Mittelpunct, und jeder rechte Winkel besteht aus 90 dergleichen Winkeln, und wenn der Bogen ED z. B. 44 solcher Theile enthält, deren der Quadrant 90 hat; so enthält auch der Winkel ACB 44 solcher Theile, deren der rechte Winkel 90 hat, d. i. es gilt hier allemal folgende Proportion: Jeder Winkel verhält sich zum rechten Winkel, wie der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen ED das Maaß des Winkels ACB, welches er auch vermöge des Begriffs der Messung nicht seyn kann, sondern der rechte Winkel HCB. Weil aber, wenn die Anzahl der Theile des Quadranten EH bekannt ist, welche der Bogen ED enthält, auch dadurch die Anzahl der Theile des rechten Winkels ECH bekannt ist, welche der Winkel ACB, dessen Schenkel den Bogen ED einschließen, enthält, so bedient man sich bequem der Theilung des Umkreises, um die Größe eines Winkels zu messen. Demnach ist eigentlich ein rechter Winkel oder auch der 90ste Theil eines rechten Winkels das Maaß der Winkel, und ein spitzer Winkel besteht aus weniger, ein stumpfer aus mehr als 90 dergleichen Theilen, welches kurz so ausgedruckt wird: Ein spitzer Winkel hat weniger, ein stumpfer mehr als 90 Grade.

2) Diese Eintheilungsweise des Umkreises in 360 Grade ist bey allen Kreisen, sie mögen groß oder klein seyn, eingeführt, weil sie nicht dazu dient, die Größe der Bogen überhaupt oder des Umkreises, sondern nur die Verhältnisse der Bogen zu ihrem Umkreise zu bestimmen. Wenn man sich in Fig. 5. den Umfang eines jeden der concentrischen Kreise in

360 Grade getheilt vorstellt; so hat EB sowol als AD 90 Grade, nur ist jeder Grad in EB kleiner als jeder Grad in AD. Eben so ist leicht zu übersehn, daß jeder Bogen, wie DF, eben so viel Grade des Quadranten AD haben müsse, als EG Grade des Quadranten EB hat. Folglich ist es gleichgültig, mit welchem Halbmesser der Bogen beschrieben werde, aus welchem die Größe eines Winkels gefunden werden kann. Man wählt daher eine Scheibe, wie Fig. 26. und 27., auf welcher ein Halbkreis mit willkührlichem Halbmesser verzeichnet und in 180 Grade getheilt ist, mit welcher die Größe eines jeden Winkels sogleich gemessen werden kann. Um nemlich einen Winkel auf dem Papier, wie ACB Fig. 26., zu messen, legt man den Mittelpunct der Scheibe auf die Spitze des Winkels C, den Anfangspunct der Theilung aber über den einen Schenkel des Winkels AC, und siehet sodann zu, unter welchem Grade der andere Schenkel BC liegt. Um Winkel auf dem Felde zu messen, wird eine solche Scheibe mit zween festen Dioptern oder Absehen in A und B Fig. 27. und einem in dem Mittelpunct C festen, aber um demselben beweglichen Dioptern Lineal EF in dessen Endpuncten E und F nemlich gleichfalls Dioptern angebracht sind, versehn. Mit dieser Scheibe wird die Messung eines Winkels auf dem Felde verrichtet, indem man dieselbe auf ein Stativ S stellt, hierauf den Mittelpunct C der Scheibe vertikal über die Spitze des zu messenden Winkels bringt, und alsdann die unbeweglichen Dioptern nach einem Stabe richtet, der in einen Punct des einen Schenkels, die beweglichen aber nach einem Stabe, der in einen Punct des andern Schenkels des zu messenden Winkels gestellt werden. Dieses Instrument wird ein Scheibeninstrument, Winkelmesser oder Astrolabium genannt. Ein Instrument wie Fig. 26. aber heißt ein Transporteur, den man sich zu Verfertigung eines aufgenommenen nur von einem mit Papier überzogenen Pappendeckel verfertigen kann. Man kann sich desselben auch zum Zeichnen der Winkel auf dem Papier bedienen, wenn ihre Größe in Graden bekannt ist.

z) Wenn es nur darauf ankommt, einen Winkel zu zeichnen, der so groß ist als ein auf dem Felde gegebener Winkel, ohne Bestimmung der Grade desselben, so darf man nur auf einem kleinen mit Papier oder Bley überzogenen Tische, dergleichen eine Mensul heißt, ein Lineal mit Dioptern an einen festen Punct, welcher in oder vertical über der Spitze des zu messenden Winkels gestellt seyn muß, legen, dieses Lineal nach den Schenkeln des Winkels richten, und alsdenn an demselben Linien ziehn, welche sich in dem festen Punkte unter demselben Winkel durchschneiden werden. Oder in Ermangelung aller dieser Instrumente darf man nur zwey Lineale AB und CB, wie Fig 28., so daß sie sich um einen Nagel B wie eine Scheere öffnen, zusammensetzen, an dem einen Ende A des einen Lineals ein drittes AD, wel-

ches in lauter gleiche kleine Theile eingetheilt ist, ebenfalls vermittelst eines Nagels A befestigen, auf die beyden Enden dieser Lineale zwo Dioptern A und C, oder kleine Bretter wie F, in B aber einen hölzernen Cylinder, der so dicke ist, als die Weite der Einschnitte in den Dioptern, oder die Breite n beträgt, so stellen, daß die Mitte beyder Dioptern sowol, als des Cylinders B, genau über der Mitte beyder Lineale stehe, und endlich das ganze Instrument auf einem Stabe ES befestigen. Will man nun damit einen Winkel auf dem Felde aufnehmen, so stellt man dieses Instrument in die Spitze desselben, so daß die Lineale horizontal liegen, richtet das eine Lineal AB nach dem einen, und das andere CB nach dem andern Schenkel des gegebenen Winkels, indem man durch die Einschnitte der Dioptern A und C hindurch an dem Cylinder B vorbey sieht, und die beyden Lineale AB und CB so weit öfnet, bis der Cylinder B die Stäbe, welche in den Schenkeln des Winkels stehn, bedeckt; hierauf bringt man das Lineal AD an die Spitze C, und bemerkt den Theilungspunct des Lineals, den die Spitze C anzeigt. Nimmt man hierauf das Instrument von dem Stabe ES, legt es auf ein Papier, und öfnet die Enden der Lineale AB und CB so weit, bis die Spitze C wieder auf den vorhin bemerkten Theilungspunct des Lineals AD zeigt, und steht in dieser Lage der Lineale AB und CB an der innern oder äußern Seite derselben gerade Linien, so machen diese mit einander einen Winkel, der eben so groß ist, als der auf dem Felde gegebene, indem dieser Winkel ABC der Scheitelwinkel desselben ist.

4) Um einen Winkel aus einem gegebenen Punct, z. B. d Fig. 53. ✶ an eine gerade Linie ab zu legen, der einem gegebenen CDE Fig. 53. gleich sey, ohne zuvörderst dessen Größe in Graden zu messen, verfährt man folgendergestalt: Man beschreibt mit willkührlicher Eröfnung des Cirkels aus der Spitze D des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln einen Bogen GR, und mit derselben Eröfnung aus d an der Seite dieses Puncts, gegen welche die Oefnung des Winkels gekehrt seyn soll, einen Bogen gh von unbestimmter Länge. Hierauf nimmt man die Weite FG in den Cirkel, macht mit derselben von g aus den Durchschnitt f, und zieht df; so ist fdg der geforderte Winkel. Denn es ist der Bogen gf = GF, weil beyde gleiche Halbmesser und gleiche Sehnen haben. Hieraus lassen sich zugleich die Vorschriften leicht herleiten, nach welchen Winkel addirt, oder von einander subtrahirt werden können. Auch ist es leicht, zu einem oder mehreren gegebenen Winkeln, welche zusammen addirt sind, die Ergänzungen derselben zu R oder 2R zu finden. So wird z. B. die Ergänzung adf des Winkels fdb zu 2R gefunden, indem bd bey d verlängert wird.

5) Ein

5) Ein Winkel, deſſen Spitze in einem Punct des Umfangs eines Kreiſes liegt, BLD Fig. 25. wird ein Winkel am Umkreiſe (Peripheriewinkel) genannt, woraus erhellt, was unter einem Winkel am Mittelpunct verſtanden werde. Wenn man ſich des Ausdrucks bedient, ein dergleichen Winkel ſtehe auf einem Bogen, ſo wird darunter derjenige Bogen verſtanden, welcher zwiſchen den beyden Schenkeln des Winkels, ſeiner Oeffnung gegen über, liegt. Z. B. Fig. 25. ſtehn die Winkel BCA, BLD, BND auf dem Bogen ED. Von Winkeln am Umkreiſe ſagt man auch, ſie liegen in einem Abſchnitt, in demjenigen nemlich, deſſen Bogen von ihren Schenkeln begränzt wird, und in welchem die Spitze des Winkels liegt. Wenn Fig. 25. die Sehne BD gezogen wird; ſo iſt es der Abſchnitt BLFHD, in welchem die Winkel BND, BLD liegen. Fig. 16. liegt der Winkel ACB im halben Kreiſe. Die Winkel am Umkreiſe ſind halb ſo groß, als die Winkel am Mittelpunct, welche mit ihnen auf einerley oder gleichen Bogen ſtehn. In Fig. 23. iſt BLD $= \frac{1}{2}$ BCD. Alle Winkel am Umkreiſe, welche in einerley oder gleichen Kreiſen auf gleichen Bogen ſtehen, oder in gleichen Abſchnitten liegen, ſind einander gleich; BLD $=$ BND in Fig. 25. Andere Beyſpiele geben Fig. 13. und 47. Winkel am Umkreiſe ſind rechte Winkel, wenn ſie im halben Kreiſe; ſtumpf, wenn ſie in einem Abſchnitt liegen, welcher kleiner; und ſpitz, wenn ſie in einem Abſchnitt liegen, welcher größer iſt, als der Halbkreis.

6) Die Grade werden eben ſo wie die Ruthen mit (°), die Minuten mit (′), die Secunden mit (″) bezeichnet. Z. B. 30° 25′ 16″ heißt 30 Grade 25 Minuten 16 Secunden.

17. *Wie können die Flächen eingetheilt werden?

In ebene Flächen oder Ebenen, und in gebogene oder gekrümmte Flächen, oder krumme Oberflächen.

Anmerk. 1) Eine ebene Fläche oder Ebene muß ſo beſchaffen ſeyn, daß zwiſchen jede zween Puncte in derſelben eine gerade Linie gezogen werden kann, welche ganz in die Fläche fällt; folglich muß ein Lineal, welches man mit der Schärfe auf dieſelbe ſetzt, allenthalben, wo man es anlegt, genau an eine ſolche Fläche anſchließen. Jede drey Puncte liegen in einer ſolchen Ebene. Ein dreyfüßiger Tiſch ſteht daher auch auf einem unebenen Boden feſt, ohne zu wanken.

2) Eine gerade Linie ſteht ſenkrecht gegen eine Ebene; wenn ſie gegen zwo Linien ſenkrecht iſt, welche in der Ebene gegen ſie gezogen werden. Z. B. In Fig. 70. iſt PC ſenkrecht auf ABT, wenn PCB, PC1 rechte Winkel ſind.

Sie kann nemlich in diesem Fall mit jeder andern Linie in derselben Ebene, z. B. mit CA, CD, CT keine schiefe Winkel machen. Die senkrechte Linie ist die kürzeste von allen Linien, welche aus einem Punct gegen eine Ebene gezogen werden können. Durch dieselbe werden daher Entfernungen der Puncte von Ebenen gemessen. Z. B. Cc Fig. 70. ist die Entfernung des Puncts C von der Ebene MiL, wenn Cc senkrecht gegen MiL ist. Durch einen Punct in oder ausserhalb einer Ebene kann nur eine gerade Linie gegen dieselbe senkrecht stehen. Wenn PC auf ABT senkrecht ist, so ist pC schief gegen ABT.

3) Zwo Ebenen, z. B. PIQ, PDQ durchschneiden sich allemal in einer geraden Linie PQ. Wenn durch einen willkührlichen Punct C dieser Durchschnittslinie in jeder Ebene eine gerade Linie CI, CD senkrecht gegen die Durchschnittslinie liegt oder gezogen wird; so heißt der dadurch entstehende Winkel DCI der Neigungswinkel dieser Ebenen, und wie Ebene ABT, in welcher die Schenkel dieses Winkels liegen, die Ebene des Neigungswinkels. Dergleichen Winkel ist auch dci, und MiL seine Ebene. Winkel, wie dci, DCI, sind nemlich überhaupt einander gleich, wenn die Schenkel des einen mit den Schenkeln des andern gleichlaufend sind; dc ∥ DC; ci ∥ CI.

4) Alle Ebenen, in welchen eine gerade Linie liegt, welche gegen eine andere Ebene senkrecht ist, sind gegen diese Ebene gleichfalls senkrecht. Beyspiele sind folgende: (1) Die Durchschnittslinie PQ zwoer Ebenen PDQ, PIQ, ist gegen die Schenkel des Neigungswinkels, folglich gegen zwo Linien CD, CI in der Ebene des Neigungswinkels ABT senkrecht, sie ist daher gegen diese Ebene überhaupt senkrecht; folglich sind auch allemal jede zwo sich durchschneidende Ebenen PDQ, PIQ, gegen die Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht. (2) Wenn überhaupt PQ auf ABT senkrecht genommen wird; so sind auch alle Ebenen durch PQ, als PAQT, PDQ, PIQ auf ABT und umgekehrt ABT auf PAQT ꝛc. senkrecht. (3) Wenn pq auf EBL senkrecht ist, so ist auch PAQT auf EBL, und EBL auf PAQT senkrecht.

5) Wenn zwo Ebenen, wie ABT und EBL, welche sich in GB durchschneiden, auf einerley dritten Ebene PAQT senkrecht sind, so ist auch ihre Durchschnittslinie GB gegen diese Ebene senkrecht.

6) Zwo Ebenen, wie MiL, ABT, können einander nach allen Seiten erweitert, nicht schneiden, d. i. sie sind gleichlaufend, wenn eine gerade Linie cC gegen beyde senkrecht ist. Wenn zwo gleichlaufende Ebenen MiL, ABT durch eine dritte Ebene, z. B. PAQT durchschnitten werden; so sind die Durchschnittslinien derselben ML, AT gleichlaufend. Senkrechte Linien zwischen gleichlaufenden Ebenen sind einander gleich.

38. Was

18. Was wird durch den Umfang einer Fläche, durch eine Figur und durch die Seiten und Ecken derselben verstanden?

Die Linien, welche eine Fläche einschließen oder begränzen, werden zusammengenommen, in Ansehung ihrer Größe, der **Umfang** (**Perimeter**) der Fläche, in Ansehung der Art ihrer Zusammensetzung aber eine **Figur** genannt; die einzelnen Linien aber, welche eine solche Figur ausmachen, heißen die **Seiten**, und die Winkel, welche sie einschließen, die **Ecken** oder **Winkel** der **Figur**.

19. * Wie können die Figuren eingetheilt werden?

1) In Ansehung der **Beschaffenheit** ihrer Seiten in **geradlinigte** und **krummlinigte** Figuren. Die Seiten der ersten sind gerade, die Seiten der andern krumme Linien.

2) In Ansehung der **Größe** ihrer Seiten oder Winkel in **ordentliche** oder **reguläre** und in **unordentliche** oder **irreguläre** Figuren. Die ersten haben lauter gleiche Seiten und Winkel, die andern nicht.

Anmerk. Wenn der Umfang eines Kreises, wie Fig. 47., in gleiche Theile getheilt wird, und die Sehnen der gleichen Bogen gezogen werden, die folglich gleichfalls einander gleich sind, so entsteht eine ordentliche Figur im Kreise. Denn es sind außer den Seiten auch die Winkel gleich, indem sie in gleichen Abschnitten liegen, oder auf gleichen Bogen stehn. In Fig. 47. liegt jeder Winkel, wie ABC, in einem Abschnitt, dessen Bogen $\frac{2}{7}$, und er steht auf einem Bogen, der $\frac{5}{7}$ des Umkreises beträgt.

3) In Ansehung der **Menge** ihrer Seiten oder Winkel in **Dreyecke** oder **Triangel**, **Vierecke** und **Vielecke** oder **Polygone**. Die ersten haben drey, die andern vier, die dritten mehr als vier Seiten und Winkel.

Anmerk. 1) Eine geradlinigte Figur kann nicht weniger als drey Seiten haben; eine krummlinigte aber kann zwar aus einer einzigen krummen Linie, z. B. einer Kreislinie bestehn; von dieser krummen Linie aber kann man sich allemal vorstellen, daß sie aus unendlich vielen unendlich kleinen ge-

raden Linien zusammengesetzt sey, folglich kann der Kreis und eine jede andere krummlinigte Figur zu den Vielecken gerechnet werden, und zwar wird der Kreis als ein ordentliches Vieleck angesehn.

2) Eine jede Figur hat allemal eben so viel Ecken oder Winkel als sie Seiten, und umgekehrt so viel Seiten, als sie Ecken hat.

3) Die Summe aller Winkel in einem Dreyeck ist allemal so groß, als 2R, oder 180°. Wenn durch eine Ecke C Fig. 29. eines Dreyecks ABC eine Linie EF mit der gegenüberstehenden Seite AB gleichlaufend gezogen wird; so sind die Wechselswinkel ECA und CAB, ferner FCB und CBA einander gleich; folglich beträgt die Summe der drey Winkel des Dreyecks soviel, als die Summe der Winkel ECA, ACB und BCF; diese ist aber der Summe zween rechter Winkel gleich.

4) Ein jedes Viereck z. B. ABDC Fig. 42. kann durch eine von einer Ecke zu der gegenüberstehenden gezogene gerade Linie AD in zwey Dreyecke ABD, ADC getheilt werden, daher ist die Summe aller Winkel eines Vierecks der doppelten Summe von 2R, d. i. 4R oder 360° gleich.

5) Wenn man in einem Vieleck z. B. Fig. 47. ABCDEFG aus einem Punct C in dem innern Raum desselben nach allen Ecken gerade Linien zieht; so entstehen so viele Dreyecke, als das Vieleck Seiten hat, folglich Winkel, deren Summe der Summe von zweymal so vielen rechten Winkeln gleich ist, z. B. 14R, wenn die Figur ein Siebeneck, folglich in 7 Dreyecke getheilt ist. Wenn von dieser Summe die um den Punct C liegenden Winkel, deren Summe = 4R ist, abgezogen werden; so bleibt die Summe aller Winkel des Vielecks übrig. Demnach ist diese der Summe von zweymal so viel rechten Winkeln als die Figur Seiten hat, weniger 4R, oder so vielmal 180 Graden gleich, als die Figur Seiten hat, weniger 360°. Die Summe aller Winkel in einem Fünfeck ist 6R oder 540°, in einem Sechseck 8R oder 720°, in einem Siebeneck 10R oder 900°, in einem Achteck 12R oder 1080° u. s. w.

6) Der Winkel, welchen jede zwo Seiten einer ordentlichen Figur mit einander machen, und welcher der Polygonswinkel genannt wird, kann gefunden werden, entweder wenn man die Summe aller Winkel einer solchen Figur sucht, und dieselbe mit der Anzahl ihrer Seiten dividirt; oder, wenn man 4R oder 360° mit der Anzahl der Seiten dividirt, und den Quotienten von 2R oder 180° abzieht. Der Quotient, welcher im ersten, und der Rest, welcher im zweyten Fall herauskommt, ist der Polygonswinkel. Dieser ist demnach im ordentlichen Dreyeck $\frac{2}{3}$R oder 60°, im Viereck 1R oder 90°, im Fünfeck $1\frac{1}{2}$R oder 108°, im Sechseck $1\frac{1}{3}$R oder 120°, im Siebeneck $1\frac{3}{7}$R oder 128° $34^{\prime}$ u. s. w.

7) Wenn

7) Wenn eine Seite eines Dreyecks, z. B. die Seite AB des Dreyecks ABC Fig. 30. verlängert wird, so ist der dadurch entstehende äußere Winkel CBD der Summe der beyden Winkel BAC und ACB gleich. Er hat nemlich mit dieser Summe einerley Ergänzung zu 2R, ABC.

8) Alle Figuren können in so viele Dreyecke, als sie Seiten haben, weniger, zwey getheilt werden, wenn die Ecken derselben durch gerade Linien innerhalb der Figur, welche daher Diagonalen derselben heißen, gehörig vereinigt werden. Z. B. Fig. 51. ist das Siebeneck ABCDEFG in fünf Dreyecke, ABG, GFB, BFE, EBC, CED getheilt, und GB, FB ꝛc. sind Diagonalen.

9) Der Name der Figur einer Fläche wird gemeiniglich anstatt der Fläche selbst gesetzt. Z. B. eine Fläche, deren Figur ein Dreyeck ist, wird selbst ein Dreyeck genannt. Es sind aber alsdenn allemal ebene Flächen zu verstehen.

20. Wie können die Dreyecke eingetheilt werden?

1) In Ansehung der Seiten in

a) gleichseitige, welche drey gleiche Seiten haben, wie Fig. 31. das Dreyeck ABC.

Anmerk. In einem jeden gleichseitigen Dreyeck sind die drey Winkel einander gleich, und nur in einem gleichseitigen Dreyeck können alle Winkel gleich seyn. Es ist daher eine ordentliche Figur. Jeder Winkel beträgt $\frac{2}{3}$ von 2R oder $\frac{2}{3}$R.

b) gleichschenklichte, welche zwo gleiche Seiten haben, wie Fig. 32. das Dreyeck ABC, wenn AB = AC.

Anmerk. 1) Die beyden gleichen Seiten AB, AC werden die Schenkel, die dritte Seite BC die Grundlinie, und die Spitze des der Grundlinie gegenüberstehenden Winkels A die Spitze des gleichschenklichten Dreyecks genannt.

2) In einem jeden gleichschenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich ABC = ACB, und nur in einem gleichschenklichten Dreyeck können zween Winkel einander gleich seyn. Wenn daher die Größe eines Winkels in einem gleichschenklichten Dreyeck bekannt ist; so läßt sich daraus die Größe der übrigen Winkel leicht bestimmen. Hätte z. B. in Fig. 32. der Winkel ABC 75°, so hätte auch BCA 75° und der Winkel BAC 180° — 2×75° d. i. 30°. Hätte der Winkel BAC 20°, so betrüge die Summe der beyden Winkel an der Grundlinie 180° — 20° d. i. 160°, folglich hätte ein jeder derselben 80°.

2) Eine senkrechte Linie AD Fig. 32. aus der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks auf die Grundlinie geht durch die Mitte derselben, und theilt zugleich den Winkel an der Spitze und das Dreyeck selbst in zwo gleiche Hälften. Umgekehrt ist eine aus der Mitte der Grundlinie nach der Spitze gezogene gerade Linie gegen die Grundlinie senkrecht, und eine aus der Mitte der Grundlinie gegen dieselbe senkrecht gezogene gerade Linie gehe durch die Spitze des gleichschenklichten Dreyecks.

c) in **ungleichseitige**, welche drey ungleiche Seiten haben, wie Fig. 33. das Dreyeck ABC.

Anmerk. In einem jeden ungleichseitigen Dreyeck sind auch die Winkel ungleich, und zwar steht der größern Seite ein größerer Winkel gegenüber, und umgekehrt. Z. B. Weil in Fig. 33. AC > BC; so ist auch der Winkel ABC, welcher der Seite AC gegenübersteht, größer, als der Winkel BAC, welcher der Seite BC gegenübersteht; und weil der Winkel ACB kleiner ist, als jeder der beyden übrigen Winkel, so ist auch die diesem Winkel gegenüberstehende Seite AB kleiner, als eine jede der beyden übrigen Seiten.

2) In Ansehung der **Winkel** in

a) **rechtwinklichte**, welche einen rechten Winkel haben. Z. B. Fig. 34. das Dreyeck ABC.

Anmerk. 1) Die Summe der beyden übrigen Winkel des rechtwinklichten Dreyecks muß demnach einem rechten Winkel gleich, folglich muß jeder derselben ein spitzer Winkel, und der eine des andern Ergänzung zu R seyn. Wenn demnach einer von beyden bekannt ist; so ist der andere leicht zu finden.

2) Die beyden Seiten des rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel einschließen, werden die **Katheten**, die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite aber die **Hypothenuse** genannt. Die letztere ist die größte Seite des Dreyecks.

b) **stumpfwinklichte**, welche einen stumpfen Winkel haben, z. B. Fig. 35. das Dreyeck ABC.

Anmerk. Die Summe der beyden übrigen Winkel muß kleiner als R, folglich muß jeder ein spitzer Winkel seyn.

c) **spitzwinklichte**, welche lauter spitze Winkel haben. Z. B. das Dreyeck ABC Fig. 33.

Anmerk. 1) Wenn durch die Spitze C Fig. 29. 30. eines der Winkel eines Dreyecks ABC eine gerade Linie EF mit der

der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite AB gleichlaufend gezogen wird, so heißt jede zwischen diesen gleichlaufenden Linien gezogene senkrechte Linie, z. B. CD, EB die Höhe und AB die Grundlinie des Dreyecks. Wenn diese senkrechte Linie aus der Spitze des Dreyecks selbst gezogen wird; so bedarf es nicht allemal der gleichlaufenden Linie durch die Spitze; zuweilen muß alsdann die Grundlinie, wie in Fig. 30., verlängert werden. Fig. 51. ist AH die Höhe, GB die Grundlinie des Dreyecks ABG u. s. w. Fig. 33. ist de die Höhe der Dreyecke BbC und bcC wenn BC, bc die Grundlinien, und beyde gleichlaufend sind.

2) Die Lehrsätze von den Eigenschaften der Dreyecke gehören zu den wichtigsten Sätzen der Geometrie, welche vor allen andern zu üben sind, weil durch dieselben sehr viele andere Lehrsätze gefunden, und viele Aufgaben aufgelöst werden. Insonderheit sind folgende Lehrsätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke vorzüglich wichtig.

1) Dreyecke sind gleich und decken einander, wenn entweder 1. die drey Seiten, oder 2. zwo Seiten und der Winkel, den sie einschließen, oder 3. eine Seite und zween Winkel, welche gegen diese Seite einerley Lage haben, in dem einen Dreyeck so groß sind, als in dem andern. Zur Erläuterung dieser Sätze ist folgendes zu merken. (1) Wenn zwey Dreyecke einander decken sollen; so muß jede Seite und Winkel in jedem der beyden Dreyecke einer Seite und Winkel in dem andern gleich seyn. Diese drey Sätze von der Gleichheit der Dreyecke wollen demnach so viel sagen: wenn von zween Dreyecken z. B. ABC, abc, Fig. 36. 37. bekannt ist, daß jede der drey Seiten jedes Dreyecks einer Seite des andern gleich sey, z. B. daß AB = ab, BC = bc, AC = ac; so können die Winkel in beyden Dreyecken nicht ungleich seyn. Oder wenn bekannt ist, daß AB = ab, AC = ac, und BAC = bac; so können die übrigen Seiten und Winkel nicht ungleich seyn, u. s. w. (2) Es sind aber in Dreyecken, die nach einem dieser dreyen Fälle gleich sind, diejenigen Winkel gleich, welche den gleichen Seiten, und diejenigen Seiten gleich, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen. Wenn z. B. in Fig. 53. AC = CE, BC = CD und der Winkel ACB = DCE, so sind die Dreyecke ABC, CDE, und auch die übrigen Seiten und Winkel gleich, nemlich AB = DE, und die Winkel A und B den Winkeln D und E. Welchem dieser beyden Winkel aber z. B. der Winkel A gleich sey, findet man folgendergestalt: Der Winkel A steht in seinem Dreyeck der Seite BC gegenüber, diese ist der Seite CD des andern Dreyecks gleich, demnach ist der Winkel E, welcher dieser Seite gegenüber steht, der gesuchte Winkel. Auf eine ähnliche Art wird bey dem dritten Fall

aus den Winkeln beurtheilt, welche Seiten einander gleich sind. (3) Bey dem zweyten und dritten Fall sind die hinzugefügten Bedingungen der Lage der gleichen Winkel wohl zu merken. Zwey Dreyecke können unter andern Bedingungen zwo gleiche Seiten und einen gleichen Winkel haben, und dennoch ungleich seyn. Z. B. Wenn in Fig. 33. das Dreyeck ABD gleichschenklicht ist, so ist

im Dreyeck ABC die Seite AB=AD im Dreyeck ADC
" " " " " AC=AC " " "
" " " der Winkel ABC=ACD " " "

die übrigen Seiten und Winkel, und die Dreyecke selbst sind jedoch ungleich.

2) Dreyecke sind überhaupt einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben. Z. B. Fig. 30. sind die Dreyecke ABC, CBD, BDF einander gleich; weil ihre Grundlinien AB. BD gleich sind, und sie eine gemeinschaftliche Höhe, CD haben. Doch können sie einander nicht decken, weil die übrigen Seiten, wie auch die Winkel ungleich sind. Dreyecke, welche einander decken, haben allemal gleiche Grundlinien und Höhen.

3) Die Summe zweyer oder mehrerer Dreyecke, welche einerley Höhe haben, ist einem Dreyeck gleich, dessen Höhe der gemeinschaftlichen Höhe, und dessen Grundlinie der Summe der Grundlinien dieser Dreyecke gleich ist. Z. B. Fig. 30. ist das Dreyeck ACD, der Summe der Dreyecke ABC, BDF gleich. Es besteht dasselbe nemlich aus den beyden Dreyecken ABC, BCD, und das letztere ist dem Dreyeck BDF gleich. Wenn in Fig. 47. alle Dreyecke um C gleiche Höhen haben; so kann auf eine ähnliche Art ein Dreyeck gefunden werden, welches ihrer Summe gleich ist.

4) Zwo Figuren heißen einander ähnlich, wenn alle in jeder Ordnung auf einander folgende Winkel der einen, allen Winkeln der andern in eben der Ordnung, und die Verhältnisse der Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, gleich sind. Z. B. die Dreyecke ABC, abc, Fig. 37* sind einander ähnlich, wenn die Winkel z. B. in folgender Ordnung gleich sind $A = a$, $B = b$, $C = c$, und wenn folgende Proportionen richtig sind:

$AB : ab = AC : ac$ oder $AB : AC = ab : ac$
$AC : ac = BC : bc$ oder $AC : BC = ac : bc$
$BC : bc = AB : ab$ oder $BC : AB = bc : ab$

oder kürzer, wenn $AB : ab = AC : ac = BC : bc$ indem die dritte dieser Proportionen aus den beyden ersten folgt. In ähnlichen Dreyecken haben auch jede zwo den gleichen Winkeln in beyden Dreyecken gegenüberstehende Seiten einerley Verhältniß. Das Zeichen der Aehnlichkeit

keit ist ∽ z. B. ABC ∽ abc bedeutet, das Dreyeck ABC ist ähnlich dem Dreyeck abc.

5) Die Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke sind folgende: Zwo Dreyecke sind einander ähnlich, wenn entweder 1. zween Winkel des einen Dreyecks zween Winkeln des andern gleich sind, oder 2. wenn ein Winkel des einen Dreyecks einem Winkel des andern gleich ist, und die zwo Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, proportionirt sind, oder 3. wenn die drey Seiten bey der Dreyecke in einerley Ordnung proportionirt sind. Diese Lehrsätze wollen, nach dem Vorhergehenden, so viel sagen: Wenn in zween Dreyecken zweyen Winkel gleich sind, so haben die Dreyecke auch alle übrige zur Aehnlichkeit erforderliche Eigenschaften; wenn nemlich in Fig. 37. *A = a und B = b; so ist auch C = c. und es sind auch die drey oben angeführten Proportionen bey diesen Dreyecken richtig. Daher sind z. B. in Fig. 5. die Dreyecke CIG, CEL, CHF, CDK einander ähnlich, wenn sie bey D, H, E, I rechtwinklicht sind; denn sie haben den gemeinschaftlichen Winkel C, und es sind auch die rechten Winkel gleich. Wenn ferner Fig. 37 *A = a und AB : ab = AC : ac. d. i. wenn in beyden Dreyecken ein Winkel gleich ist, und die ihn einschließenden Seiten einerley Verhältniß zu einander haben; so können die übrigen Winkel nicht ungleich seyn, und es sind auch die übrigen zur Aehnlichkeit der Dreyecke erforderlichen Proportionen richtig. Endlich wenn bey zweyen Dreyecken die zur Aehnlichkeit erforderlichen Proportionen richtig sind, z. B. wenn bekannt ist, daß in Fig 37 *AB : ab = AC : ac = BC : bc; so können auch die Winkel der Dreyecke, welche denen zu einerley Verhältniß gehörigen Seiten gegenüber stehen, nicht ungleich seyn. Uebrigens erhellt, daß auch zwo Dreyecke einander ähnlich sind, wenn jedes derselben einerley drittem Dreyeck ähnlich ist. Wenn in Fig. 16. ACE ∽ ACB, und ACB ∽ CEB, so ist auch ACE ∽ CEB.

6) Wie die bey ähnlichen Dreyecken geltenden Proportionen gefunden werden, wenn bekannt ist, welches die gleichen Winkel sind, werden folgende Beyspiele lehren. (1) In Fig. 34. ist AED ∽ ACB, wenn die Winkel bey B und D rechte Winkel sind, indem beyde Dreyecke den Winkel A gemeinschaftlich haben. In den Proportionen, welche bey diesen Dreyecken gelten, sollen die vorhergehenden Glieder Seiten des Dreyecks AED seyn, folglich müssen die nachfolgenden Glieder Seiten des Dreyecks ABC seyn, und es sind also in folgenden Zeilen die Lücken auszufüllen:

I AE : = AD :
II AE : = ED :
III AD : = ED :

Hier

Hier muß in I und II zum zweyten Gliede aus dem Dreyeck ABC die Seite AC genommen werden, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, weil das erste Glied AE ist, und diese Seite in dem Dreyeck ADE dem rechten Winkel gegenübersteht. Ferner in I muß zum vierten Gliede diejenige Seite des Dreyecks ABC genommen werden, die dem Winkel gegenübersteht, welchem der Winkel AED gleich ist, weil AD im dritten Gliede ist, welche dem Winkel AED gegenübersteht. Es ist aber ACB = AED, folglich ist AB in I zum vierten und aus eben dem Grunde in III zum zweyten Gliede zu machen. Eben so erhellt, daß in II und III zum vierten Gliede BC genommen werden müsse, weil die Seite ED im dritten Gliede ist, welche dem Winkel A gegenübersteht. Folglich sind die Proportionen folgende:

I AE : AC = AD : AB
II AE : AC = ED : BC
III AD : AB = ED : BC

(2) In Fig. 13. sind die Dreyecke ABD, AFE ähnlich, weil außer dem Winkel A, welcher beyden gemeinschaftlich ist, auch die Winkel BDA, AEF, welche auf einerley Bogen BF stehen, gleich sind. Demnach gelten folgende Proportionen:

AD : AE = AB : AF
AD : AE = BD : EF
AB : AF = BD : EF

Die erste dieser drey Proportionen enthält folgenden wichtigen Lehrsatz: Zwo gerade Linien, welche wie AE, AD, von einem Punct außerhalb eines Kreises in denselben gezogen werden, verhalten sich umgekehrt, wie ihre Theile, welche außerhalb des Kreises liegen.

7) Einige wichtige Folgerungen aus den Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Dreyecke sind folgende:

(1) Wenn durch irgend einen Punct b Fig. 33. einer Seite eines Dreyecks ABC einer andern Seite desselben BC gleichlaufend eine Linie bc gezogen wird, so ist das dadurch entstehende kleinere Dreyeck Abc dem größern ähnlich, indem beyde Dreyecke gleiche Winkel haben, und es ist z. B.

Ab : AB = Ac : AC
oder AB : Ab = AC : Ac

d. i. AC ist die vierte Proportionallinie zu Ab, AB und Ac, oder Ac zu AB, Ab und AC. Mehrere Beyspiele enthält Fig. 5.

(2) Daher wird zu drey gegebenen geraden Linien, wie z. B. zu den mit 1 2 3 in Fig. 33. bezeichneten Linien, die vierte Proportionallinie folgendergestalt gefunden: 1) Es

wird

wird eine gerade Linie AB Fig. 33. gezogen, und auf dieselbe aus einerley Punct A die erste und zwote gegebene Linie getragen. So ist in Fig. 33. AB der Linie 1, Ab der Linie 2 gleich gemacht. 2) Aus dem Puncte A wird eine andere gerade Linie AC unter einem willkührlichen Winkel BAC gezogen, und auf diese die dritte gegebene Linie getragen. In Fig. 33. ist AC der Linie 3 gleich gemacht. 3) Hierauf werden die Endpuncte der ersten und dritten gegebenen Linie B und C durch eine gerade Linie BC vereinigt, und 4) durch den Endpunct der zwoten Linie b eine gerade Linie bc der BC gleichlaufend gezogen, welche die Linie AC in c durchschneidet. Die Linie Ac ist die gesuchte vierte Proportionallinie zu den drey gegebenen. Wären die 3 Linien Ab, AB und Ac gegeben, folglich AC zu finden, so müßten die Endpuncte b und c durch die gerade Linie bc vereinigt und BC mit bc gleichlaufend gezogen, folglich Ac gehörig verlängert werden.

(3) Wenn aus der Spitze C Fig. 16. und 48. des rechten Winkels eines rechtwinklichten Dreyecks eine senkrechte Linie CE auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, so wird das Dreyeck dadurch in zwey Dreyecke ACE, CEB getheilt, welche dem ganzen Dreyeck, folglich auch einander ähnlich sind, und es sind hier unter mehreren andern auch folgende Proportionen richtig:

I AE : AC = AC : AB weil ACE ∽ ABC
II AE : EC = EC : EB weil ACE ∽ CEB
III BE : BC = BC : AB weil CEB ∽ ACB

d. i. AC ist die mittlere Proportionallinie zwischen AE und AB; EC ist die mittlere Proportionallinie zwischen AE und EB u. s. w. Aus der Vergleichung der 16ten und 48sten Figur mit einigen im Vorhergehenden vorgetragenen Sätzen erhellt, daß durch die zwote dieser Proportionen auch folgender Satz erwiesen sey: In einem Kreise ist jede halbe Sehne CE die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen, in welche sie den auf ihr senkrecht stehenden Durchmesser theilt, z. B. in Fig. 3. ist AK:KE = KE:KF.

(4) Zu zwo gegebenen geraden Linien kann daher die mittlere Proportionallinie auf eine doppelte Weise folgendergestalt gefunden werden. 1) Es werden beyde gegebene Linien aus einerley Punct einer geraden Linie auf dieselbe gelegt, wie z. B. AE, AB Fig. 16. beyde von A aus auf einander liegen. Ueber die größere der beyden Linien AB wird hierauf ein Halbkreis ACB beschrieben, und aus dem Endpuncte der kleineren die senkrechte Linie CE, und endlich AC gezogen, welche die gesuchte mittlere Proportionallinie zwischen AE und AB ist. Oder 2) es werden die beyden gegebenen Linien z. B. AE, EB auf eine gerade Linie neben einander gelegt, hierauf über AB, welche ihrer Summe gleich ist, ein Halbkreis beschrieben, und aus

aus E die senkrechte Linie EC gezogen, welche die gesuchte mittlere Proportionallinie zwischen AE und EB ist.

3) Alle ordentliche Figuren von gleichvielen Seiten sind einander ähnlich. Denn es sind nicht nur ihre Winkel gleich, sondern es haben auch die gleichen Seiten derselben einerley Verhältniß zu einander. Figuren, welche einander decken, sind gleich und ähnlich, und umgekehrt. Figuren, welche nicht gleichviel Seiten haben, können nicht einander ähnlich seyn.

21. * Wie können die Vierecke eingetheilt werden?

Alle Vierecke sind

1) entweder **Parallelogramme**, das ist, solche Vierecke, in welchen jede zwo einander gegenüber liegende Seiten gleichlaufend sind. Fig. 38. 41. Diese sind wieder

a) entweder **rechtwinklichte**, (**Rechtecke**, **Rectangel**) welche vier rechte Winkel haben, dazu gehört

aa) das **Quadrat**, welches zugleich vier gleiche Seiten hat, Fig. 38.

bb) das **länglichte Viereck** (**Oblongum**), in welchem nur jede zwo einander gegenüberliegende Seiten gleich sind; Fig. 39.

b) oder **schiefwinklichte**, welche vier schiefe Winkel haben; dazu gehört

aa) die **Raute** (**Rhombus**), welche zugleich vier gleiche Seiten hat, Fig. 40.

bb) die **länglichte Raute** (**Rhomboides**), in welcher nur jede zwo einander gegenüberliegende Seiten gleich sind; Fig. 41.

2) oder **Trapezien**, welche Benennung alle Vierecke erhalten, die keine Parallelogrammen sind. Fig. 42.

Anmerk.

Anmerk. 1) Eine Diagonale, wie BC, Fig. 41. AD, Fig. 42. theilt jedes Viereck in zwey Dreyecke; diese sind in einem jeden Parallelogramm einander gleich, und in dem Quadrat und der Raute sind sie zugleich gleichschenklicht. In jedem Parallelogramm sind wenigstens jede zwo gegenüber stehende Seiten und Winkel gleich, und ein Viereck, in welchem jede zwo gegen über stehende Seiten gleich sind, ist ein Parallelogramm. Hierauf gründet sich unter andern die Einrichtung des Parallellineals. Jede zween Winkel, welche an einerley Seite eines Parallelogramms liegen, betragen zusammen 2R. Wenn daher ein Winkel eines Parallelogramms bekannt ist; so sind die übrigen leicht durch Rechnung oder Zeichnung zu finden. Ist derselbe ein rechter Winkel, so sind sämtliche übrige Winkel gleichfalls rechte Winkel. Wenn von zwegen einander gegenüber stehenden Seiten eines Vierecks bekannt ist, daß sie einander gleich und gleichlaufend sind; so sind auch die beyden andern Seiten gleichlaufend und gleich, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

2) Eine zwischen zwo gegenüberstehende Seiten eines Parallelogramms gegen diese senkrecht gezogene Linie, z. B. AF, Fig. 40. AB, Fig. 38. 39. heißt die Höhe, und die Seite, auf welcher sie senkrecht steht, die Grundlinie des Parallelogramms. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich. Z. B. die Parallelogramme BC, bc Fig. 43. sind einander gleich, wenn BD = bd und AB = ae. Zu jedem schiefwinklichten Parallelogramm kann demnach ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

3) Ein Parallelogramm, welches mit einem andern gleiche Höhe, aber eine Grundlinie hat, welche die Hälfte oder das Drittel, Viertel ꝛc. der Grundlinie des andern ist, ist selbst die Hälfte oder das Drittel, Viertel ꝛc. dieses andern Parallelogramms. Z. B. Wenn in Fig. 30. $BD = \frac{1}{2}AD$ ist; so ist $BDGH = \frac{1}{2}ADGJ$. Ein Parallelogramm, welches mit einem andern gleiche Grundlinie, aber eine Höhe hat, welche die Hälfte oder das Drittel, Viertel ꝛc. der Höhe des andern ist, ist selbst die Hälfte oder das Drittel, Viertel ꝛc. dieses andern Parallelogramms. Z. B. Wenn in Fig. 30. $GD = \frac{1}{2}CD$, so ist $BDGH = \frac{1}{2}BDCE$. Wenn in Fig. 3. $Fb = \frac{1}{3}KF$, so ist $NLOM = \frac{1}{3}NLGE$, und $MOGE = \frac{2}{3}NLGE$. Eben diese Sätze sind auch von Dreyecken richtig. Wenn in Fig. 30. $BD = \frac{1}{2}AD$, so ist $BDC = \frac{1}{2}ADC$; wenn $GD = \frac{1}{2}CD$, so ist $BDG = \frac{1}{2}BDC$; $BDK = \frac{1}{2}BDF$ ꝛc. Allgemein werden diese Sätze folgendergestalt ausgedrückt: Parallelogramme oder

Dreyecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien; und Parallelogramme oder Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Daher ist z. B. Fig. 33. das Dreyeck Abc:bcC=Ac:cC. Wenn Ac=7′ 3″, cC=6′ 3″, so verhalten sich auch die Dreyecke wie 73:63. Wenn man sich cC in 63 gleiche Theile getheilt, und von b durch alle Theilungspuncte gerade Linien gezogen vorstellt; so wird bcC in 63 gleiche Dreyecke getheilt. Ac enthält 73 solcher Theile, deren cC 63 hat, und wenn man sich auch hier eine wirklich vorgenommene Theilung der Ac, und gerade Linien von b durch alle Theilungspuncte gezogen vorstellt, so enthält auch Abc 73 solcher Dreyecke, deren bcC 63 enthält, welches zur Richtigkeit der Proportion erforderlich ist. Diese Sätze dienen unter andern theils zur Theilung der Parallelogramme und Dreyecke, theils zur Uebung für Anfänger in den Begriffen von den Proportionen und Verhältnissen.

4) Parallelogramme sind überhaupt einander gleich, wenn die Verhältniß ihrer Grundlinien der umgekehrten Verhältniß ihren Höhen gleich ist, d. i. wenn die Höhe des einen Parallelogramms so vielmal kleiner ist, als die Höhe des andern, so vielmal die Grundlinie des ersten Parallelogramms größer ist, als die Grundlinie des andern. Z. B. In Fig. 30. sind der Parallelogramme BDCE, ADGI Grundlinien BD und AD, ihre Höhen CD und GD. Wenn nun

BD:AD=1:2
CD:GD=2:1
folglich BD:AD=GD:CD

so sind die Parallelogramme einander gleich.

5) Die äußern Glieder dieser Proportion sind Grundlinie und Höhe des einen, die mittleren aber Grundlinie und Höhe des andern Parallelogramms. Wenn daher dieses andere Parallelogramm ein Quadrat ist, so sind die mittleren Glieder gleich. Wenn daher eine gerade Linie die mittlere Proportionallinie zwischen zwoen andern ist, so ist das Quadrat, dessen Seite diese Linie ist, dem Parallelogramm gleich, dessen Grundlinie und Höhe die beyden andern Linien sind. Weil z. B. in Fig 16. AE:AC=AC:AB, so ist ein Quadrat auf AC einem Parallelogramm gleich, dessen Grundlinie und Höhe AE und AB sind; und weil BE:BC=BC:AB, so ist ein Quadrat auf BC einem Parallelogramm gleich, dessen Grundlinie und Höhe BE und AB sind. Die Zeichnung dieser Quadrate und Parallelogramme stellt Fig. 48. vor, wo sowol AD als BH der AB gleich gemacht sind. Hier ist demnach

das Quadrat von AC oder ACKL=dem Parallelogramm AEFD
das Quadrat von BC oder BCGI=dem Parallelogramm EBHF.

Zugleich erhellt aus der Figur, daß diese beyden Parallelogramme zusammen das Quadrat von AB ausmachen.

6) Hier-

6) Hieraus folgt folgender Lehrſatz, der von ſeinem Erfinder der Pythagoriſche genannt wird, und einer der wichtigſten in der Geometrie iſt: das Quadrat der größten Seite eines rechtwinklichten Dreyecks iſt der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten gleich. In Fig. 48. iſt

$$ABHD = BCGI + ACKL$$

welches auch, wenn 9 das Quadrat bedeutet, kürzer folgendergeſtalt ausgedruckt werden kann:

$$AB^9 = BC^9 + AC^9.$$

Die 49ſte Figur ſtellt ein Beyſpiel von dieſem Lehrſatz dar. Wenn die Seiten BC und AB ſich verhalten, wie 3 : 4, d. i. wenn BC aus ſolchen Theilen beſteht, deren AB 4 hat; ſo hat AC 5 ſolcher Theile, und wenn man die Quadrate dieſer Seiten gehörig theilt, wie es die Figur vorſtellt; ſo erhält AFGB 16, BHIC 9, und ACDE 25, d. i. 16 + 9 kleine Quadrate, welche ſämtlich einander gleich ſind.

7) Der pythagoriſche Lehrſatz gilt nur von rechtwinklichten Dreyecken; folglich machen jede drey gerade Linien, welche ſich wie die Zahlen 3 4 5 verhalten, zuſammen ein rechtwinklichtes Dreyeck. Wenn man daher die beyden Enden einer Schnur oder Kette von 12 Fuß zuſammengefaßt, an dem Endpunct des dritten und ſiebenten Fußes aber einen Stab hält, und die Schnur oder Kette ſo ausdehnt, daß die drey Theile derſelben, wovon der erſte 3, der zweyte 4, der dritte 5 Fuß lang iſt, ein Dreyeck machen, ſo iſt dieſes Dreyeck rechtwinklicht, und es iſt daher leicht, einen rechten Winkel auf dem Felde bloß mit Stäben und der Meßkette abzuſtecken. Eben dieſes kann auch geſchehn, wenn man die Endpuncte einer Schnur von 24 Fuß zuſammenfaßt, an den Endpunct des ſechsten und vierzehnten einen Stab hält, und ſodenn wie vorhin verfährt, indem die Zahlen 6 8 10, welche zuſammen 24 ausmachen, ſich wie die Zahlen 3 4 5 verhalten ꝛc.

8) Aus dem pythagoriſchen Lehrſatz werden auch die Vorſchriften hergeleitet, ein Quadrat zu finden, welches der Summe oder Differenz gegebener Quadrate gleich iſt. Wenn z. B. zwey Quadrate, deren Seiten AB, BC Fig. 34. ſind, addirt werden ſollen; ſo werden beyde Seiten unter einem rechten Winkel zuſammengeſetzt, und hierauf die Linie AC gezogen, deren Quadrat das geſuchte iſt. Wenn zu beyden noch ein drittes Quadrat, z. B. das Quadrat von AG Fig. 34. addirt werden ſoll, ſo wird AG an AC ſenkrecht geſetzt, und hierauf CG gezogen, deren Quadrat das geſuchte iſt, u. ſ. w. Ein Quadrat, welches der Differenz zweyer Quadrate gleich iſt, zu finden, verfährt man

folgendergestalt: Ueber der Seite des gröſsern Quadrats AB Fig. 16. wird ein Halbkreis ACB beschrieben; in denselben wird von A aus eine Sehne AC gelegt, welche der Seite des kleineren Quadrats gleich ist, und hierauf BC gezogen; diese ist die Seite des gesuchten Quadrats.

9) Ein Halbkreis auf der gröſsten Seite eines rechtwinklichten Dreyecks ist der Summe der Halbkreise auf den beyden Katheten gleich. Fig. 16. ist

$$ACFBA = AHCA + CGBC,$$

woraus erhellt, wie Kreise auf eine ähnliche Art, wie die Quadrate, addirt oder subtrahirt werden können.

10) Ein Dreyeck, welches mit einem Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe hat, ist halb so groß als dasselbe, z. B. die Dreyecke CBD, FBD Fig. 30. sind jedes die Hälfte des Parallelogramms BDCE. Dagegen sind Parallelogramme und Dreyecke einander gleich, entweder, wenn ihre Höhen gleich sind, und die Grundlinie des Parallelogramms halb so groß, als die Grundlinie des Dreyecks, oder, wenn ihre Grundlinien gleich sind, und die Höhe des Parallelogramms halb so groß als die Höhe des Dreyecks ist. Z. B. Wenn in Fig. 30. $BD = \frac{1}{2}AD$ und $GD = \frac{1}{2}CD$ ist, so ist sowal das Parallelogramm BDCE als das Parallelogramm ADGI dem Dreyeck ACD gleich. Demnach kann auch zu jedem Dreyeck ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

11) Aus den Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Dreyecke und den Eigenschaften der Parallelogramme kann die Einrichtung des verjüngten Maaſsstabes Fig. 24. folgendergestalt erläutert werden. Die gerade Linie AD ist in mehrere gleiche Theile getheilt, deren jeder eine verjüngte Ruthe bedeutet, und wovon die erste wiederum in 10 Fuß eingetheilt worden ist. Jeden Fuß wieder genau in 10 Zoll zu theilen, ist bey der geringen Größe des Fußes nicht möglich. Um daher die Zolle auf eine andere bequeme Art und genau zu erhalten, ist auf der Grundlinie AD das Rechteck AB von willkührlicher Höhe AC errichtet, und AC in 10 gleiche Theile getheilt, ferner sind durch die Theilungspuncte gleichlaufende Linien, wie ld, mit der Grundlinie, auch durch die Endpuncte der Ruthen senkrechte Linien, wie kl, gezogen; endlich ist Ck gleichfalls in 10 gleiche Theile, deren jeder einen Fuß bedeutet, getheilt, und aus den Theilungspuncten sind die Transversallinien, wie li, gezogen worden. Hierdurch ist das Dreyeck ikl entstanden, dessen Seite kl in 10 gleiche Theile getheilt ist, und in welchem mit der Grundlinie ik gleichlaufend mehrere Linien, wie hg, ef, gezogen sind. Jede dieser Parallelen ist die Grundlinie eines Dreyecks, wie efl, ghl, deren jedes dem ganzen Dreyeck ikl ähnlich ist. Demnach ist z. B.

fl : kl

fl : kl = ef : ik
gl : kl = hg : ik u. s. w.

d. i. die Linien von ef, hg ꝛc. sind der eben so vielste Theil von ik, als fl, gl, von kl. Nun beträgt fl $\frac{4}{10}$, gl $\frac{8}{10}$ von kl, demnach ist auch ef $\frac{4}{10}$, hg $\frac{8}{10}$ von ik, d. i. (weil ik = 1 Fuß) ef ist 4 Zoll, hg 8 Zoll. Diese Schlüsse gelten von allen übrigen der ik gleichlaufenden Linien, in dem Dreyeck ikl, und überhaupt beträgt demnach eine jede derselben so viel Zolle als die Zahlen anzeigen, welche bey AG an derselben Parallele stehn. Folglich beträgt z. B. af, welche aus den Theilen ae (=15) und ef besteht, 5 Fuß 4 Zoll; qg, welche aus qh und hg besteht, 5 Fuß 8 Zoll, cm 8 Fuß 1 Zoll u. s. w.

22. *Wie können die Vielecke oder Polygone eingetheilt werden?

Es werden dieselben nach der Anzahl ihrer Seiten und Winkel in **Fünfecke**, **Sechsecke**, **Siebenecke** u. s. w. eingetheilt.

Z. B. Fig. 45. ist ein ordentliches Fünfeck, Fig. 46. ein Sechseck, Fig. 47. ein Siebeneck.

Anmerk. 1) Wenn zween auf einander folgende Winkel eines ordentlichen Vielecks, z. B. GAB, ABC Fig. 47. durch gerade Linien Ac, Bc halbirt, und aus dem Durchschnittspunct c, welcher der Mittelpunct des Vielecks genannt wird, nach den übrigen Ecken der Figur gerade Linien gezogen werden; so wird das Vieleck dadurch in Dreyecke getheilt, welche gleichschenklicht und sämtlich einander gleich sind, und sich decken, folglich auch gleiche Höhen haben, und also nach dem Vorhergehenden summirt werden können. Daher ist jedes ordentliche Vieleck einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise des Vielecks, und dessen Höhe der senkrechten Linie gleich ist, welche aus dem Mittelpunct des Vielecks auf eine seiner Seiten gezogen werden kann. Folglich kann auch zu jedem ordentlichen Vieleck ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

2) Um ein jedes ordentliches Vieleck, wie Fig. 47., kann ein Kreis beschrieben werden, dessen Umfang durch alle Ecken desselben geht. Die Seiten der gleichen gleichschenklichten Dreyecke, in welche das Vieleck getheilt werden kann, sind nemlich die Halbmesser desselben, und Mittelpunct und Seiten des Vielecks sind zugleich Mittelpunct und Sehnen dieses Kreises.

3) Die Summe der Winkel an der Grundlinie der gleichschenklichten Dreyecke des Vielecks ist dem Polygonwinkel des Vielecks gleich, woraus die zwote der oben gegebenen Regeln, diesen Winkel zu finden, leicht hergeleitet werden kann, wenn man erwägt, daß die Winkel um c sämtlich einander gleich sind, folglich jeder derselben gefunden werden kann, indem 360° durch die Zahl der Seiten des Vielecks dividirt werden. Die Hälfte des Polygonwinkels des ordentlichen Sechsecks beträgt 60° oder $\frac{2}{3}$R. Folglich kann daſſelbe in 6 gleichseitige Dreyecke getheilt werden. Zugleich folgt hieraus, daß der Halbmesser eines jeden Kreises auf dessen Umfang, als Sehne, sechsmal herumgelegt, folglich der Umfang eines jeden Kreises leicht in 6 gleiche Theile getheilt werden könne.

23. Wie können die Dreyecke aus gegebenen Linien gezeichnet werden?

1) Ein **gleichseitiges Dreyeck**, Fig. 31., wird **aus einer gegebenen Linie** BC also gezeichnet. Es wird die gegebene Linie BC zwischen die Spitzen eines Cirkels gefaßt, und bey solcher Eröfnung seiner Schenkel mit denselben aus dem einen Endpunct dieser Linie B der Bogen mn, aus dem andern C aber der Bogen an beschrieben. Hierauf werden aus eben diesen Endpuncten gegen den Durchschnittspunct dieser Bogen die Linien AB und AC gezogen.

2) **Ein gleichschenklichtes Dreyeck**, Fig. 32. wird **aus zwo gegebenen Linien**, BC und AB, deren eine die Grundlinie des Dreyecks seyn soll, also gezeichnet. Es werden aus den Endpuncten der Grundlinie BC mit einem Halbmesser, welcher der andern zu den Schenkeln gegebenen Linie AB gleich ist, die Bogen mn und an beschrieben, und hierauf gegen den Durchschnittspunct dieser Bogen die Linien AB und AC gezogen.

3) **Ein ungleichseitiges Dreyeck**, Fig. 33. wird **aus drey gegebenen Linien**, AB, BC und AC also gezeichnet. Es wird aus dem einen Endpunct B der

der einen gegebenen Linie BC der Bogen m m mit einem Halbmesser, welcher der andern Linie AB, ferner aus dem andern Endpunct C der Bogen n n mit einem Halbmesser, welcher der dritten Linie AC gleich ist, beschrieben; hierauf werden aus diesen Endpuncten gegen den Durchschnittspunct dieser Bogen die Linien AB und AC gezogen.

Anmerk. 1) Unter drey gegebenen Linien, aus welchen ein Dreyeck gezeichnet werden soll, müssen jede zwo zusammen genommen gröſser seyn als die dritte. Z. B. die beyden Sparren eines Dachs müssen zusammengenommen länger seyn, als der Balken, auf welchen sie gesetzt werden sollen.

2) Wenn zwo Seiten eines Dreyecks AB, BC Fig. 33. und der Winkel ABC, den sie einschlieſsen, gegeben sind, um ein Dreyeck aus diesen Stücken zu zeichnen, so wird zuvörderst der gegebene Winkel gezeichnet, hierauf werden dessen Schenkel den gegebenen Seiten gleich gemacht, und endlich die Endpuncte der Schenkel durch eine gerade Linie AC vereinigt. Sind eine Seite z. B. BC, und zween Winkel ABC, AGB, welche an dieser Seite liegen, deren Summe aber kleiner als 2R seyn muſs, gegeben; so wird das Dreyeck gezeichnet, indem die gegebenen Winkel an die Endpuncte der gegebenen Seite gelegt werden, da denn die Schenkel derselben sich durchschneiden müssen. Wären aber zu BC die Winkel ABC und BAC gegeben; so müſste zuvörderst der Winkel ACB gefunden werden. Dies geschieht, indem man die Winkel ABC, BAC, (wie Fig. 25. BCA, ACd) addirt, und zu der Summe das Complement derselben (wie Fig. 25. dCF) sucht.

24. Wie können die Vierecke aus gegebenen Linien oder Linien und Winkeln gezeichnet werden?

1) **Ein Quadrat, Fig. 38. wird aus einer gegebenen Linie BD, oder eine Raute, Fig. 40. aus einer gegebenen Linie BD und einem Winkel ABD also gezeichnet.** Es wird an die gegebene Linie BD eine andere Linie AB senkrecht, wie Fig. 38. oder unter dem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 40.

gesetzt, und diese der BD gleich gemacht. Hierauf wird eben diese gegebene Linie BD zwischen die Spitzen eines Cirkels gefaßt, und bey solcher Eröfnung seiner Schenkel mit demselben aus den Puncten A die Bogen m m, und aus den Puncten D die Bogen n n beschrieben. Endlich werden aus den Puncten A und D gegen die Durchschnittspuncte dieser Bogen die Linien AC und CD gezogen.

2) Ein jedes anderes **rechtwinkliches Parallelogramm**, Fig. 39., wird **aus zwo gegebenen Linien** AB und BD, und ein **schiefwinkliches**, Fig. 41., **aus zwo gegebenen Linien und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel** ABD also gezeichnet. Es wird die eine Linie AB senkrecht, wie Fig. 39., oder unter dem gegebenen schiefen Winkel, wie Fig. 41., an die andere Linie BD gesetzt. Hierauf werden aus A die Bogen m m mit einem Halbmesser, welcher der Linie BD, und aus D die Bogen n n mit einem Halbmesser, welcher der Linie AB gleich ist, beschrieben. Endlich werden aus A und D gegen die Durchschnittspuncte dieser Bogen die Linien AC und CD gezogen.

3) Ein **Trapezium**, Fig. 42., wird **aus vier gegebenen Linien** AB, BD, CD, AC **und einem Winkel** B also gezeichnet. Es wird die Linie AB unter dem gegebenen Winkel B an die Linie BD gesetzt. Hierauf wird aus A mit einem Halbmesser, welcher der Linie AC gleich ist, gegen die Seite, nach welcher die Oefnung des gegebenen Winkels gerichtet ist, der Bogen m m, und aus D mit einem Halbmesser, welcher der Linie CD gleich ist, der Bogen n n beschrieben. Endlich werden aus den Puncten A und D gegen

gen den Durchschnittspunct dieser Bogen der Linien AC und CD gezogen.

Anmerk. 1) Es wird vorausgesetzt, daß, wenn der gegebene Winkel B kleiner als 180° ist, die Linien CD und AC zusammengenommen größer sind, als BA und BD, wie Fig. 42.; sonst muß zugleich bekannt seyn, ob der Winkel, den diese beyden Linien CD und AC machen sollen, ein auswärts oder einwärts gehender Winkel seyn soll, weil alsdenn der Durchschnittspunct C der Bogen auch einwärts, wie z. B. bey Fig. 42* zwischen B und c fallen könnte. Ist übrigens der gegebene Winkel B ein einwärts gehender, oder ein solcher, der größer als 180° ist, wie Fig. 42**, so müssen die beyden Linien AC und CD zusammengenommen allemal größer seyn, als AB und BD. Uebrigens kann auch ein Trapezium aus drey gegebenen Linien und zween Winkeln auf eine ähnliche Weise gezeichnet werden.

2) Unter vier gegebenen Linien, aus welchen ein Viereck gezeichnet werden soll, müssen jede drey zusammengenommen allemal größer seyn, als die vierte.

3) Da ein jedes Trapezium in zwey Dreyecke getheilt werden kann, so können auch zu jedem Trapezium zwey Rechtecke angenommen werden, deren Summe demselben gleich ist.

25. Wie können die Vielecke beschrieben werden?

1) Ein **ordentliches** Vieleck, z. B. ein Siebeneck, Fig. 47., wird aus einer gegebenen Linie also gezeichnet. Es wird **entweder** an die gegebene Linie AB der gehörige Polygonwinkel, welcher hier 180° 34′ beträgt, gesetzt, und die Linie GA der AB gleich gemacht; ferner wird an die Linie GA derselbe Winkel FGA gesetzt, FG aber wieder der AB gleich gemacht, u. s. w. **Oder**, es werden an die beyden Endpuncte der Linie AB die halben Polygonwinkel, folglich hier 64° 17′ gesetzt, wodurch das gleichschenklichte Dreyeck oAB entsteht; ferner wird aus der Spitze dieses Dreyecks o mit dem Halbmesser oA der Kreis ABCDEFG beschrieben, an dessen Umfange die Linie AB sich genau siebenmal

herumtragen läßt; endlich werden durch die hiedurch bestimmte Puncte des Umkreises die Sehnen AG, GF, FE, ED, DC, GB, gezogen, welche mit AB das gesuchte Siebeneck geben.

Anmerk. 1) Je mehr Seiten ein ordentliches Vieleck hat, desto näher kommt die Größe seines Umfangs, der Größe des Umfangs des Kreises, welcher um dasselbe beschrieben werden kann, desto näher kommt ferner auch die Größe des Vielecks selbst der Größe des Kreises, und die Höhe jedes der gleichschenklichten Dreyecke, in welche das Vieleck getheilt werden kann, dem Halbmesser des Kreises. Z. B. Ein Zehntausendeck in einem Kreise ist von dem Kreise selbst, sein Umfang von dem Umfang des Kreises und die Höhe seiner Dreyecke von dem Halbmesser des Kreises ungleich weniger unterschieden, als das Zehneck von demselben Kreise u. s. w. Bey einem Millioneneck sind diese Unterschiede wiederum ungleich geringer, als bey dem Zehntausendeck, u. s. w. Dies erläutert einigermassen, warum in der Geometrie der Kreis für ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen d. i. von einer solchen Anzahl Seiten, die gröſſer ist, als jede Zahl, die sich angeben läßt, angesehn wird, dessen Höhe der gleichen Dreyecke, in welche es getheilt werden kann, dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Hieraus folgt sodenn, daß der Kreis einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfange, und dessen Höhe dem Halbmesser desselben gleich ist. Demnach kann auch zu jedem Kreise ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

2) Höhe des Abschnitts eines Kreises, z. B. EFGE. Fig. 3., ist die senkrechte Linie KF, welche aus der Mitte der Sehne bis zum Bogen geht. Sie ist die Verlängerung des auf der Sehne senkrechten Halbmessers CF. Ein Abschnitt beträgt ohngefähr $\frac{2}{3}$ des Rechtecks EGLN, welches mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie seiner Sehne gleich ist. Wenn $Kb = \frac{2}{3}$ KF ist; so ist das Rechteck EGoM dem Abschnitt EFGE ohngefähr gleich. Genauere Untersuchungen lehren nemlich, daß der Abschnitt etwas gröſser als dieses Parallelogramm, der Unterschied aber desto unbeträchtlicher sey, je kleiner der Abschnitt ist.

3) Ein Ausschnitt eines Kreises ist einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie dem Bogen, und dessen Höhe dem Halbmesser des Ausschnitts gleich ist. Zu jedem Ausschnitt kann demnach auch ein Rechteck angenommen werden, welches ihm gleich ist.

2) Ein

2) Ein unordentliches Vieleck, z. B. ein Siebeneck Fig. 51. wird aus allen gegebenen Seiten desselben, weniger zweyen, AB, BC, CD, DE, und EF, und allen gegebenen Winkeln desselben, weniger einem, A, B, C, D, E, F, wenn zugleich die Ordnung bekannt ist, in welcher die gegebenen Seiten und Winkel auf einander folgen, gezeichnet, indem man die Seiten unter den gegebenen Winkeln in der bestimmten Ordnung zusammengesetzt, da sich die beyden fehlenden Seiten AG und GF, und der fehlende Winkel G von selbst geben. Oder es werden die fünf Dreyecke ABG, GBF, FEB, EBG, ECD, aus welchen dasselbe besteht, gehörig an einander gesetzt, wenn alle Seiten der Figur und die Diagonalen derselben gegeben sind.

Anmerk. Da ein jedes Vieleck in Dreyecke getheilt werden kann, so können auch zu demselben eben so viele Rechtecke angenommen werden, deren Summe dem Vieleck gleich ist.

26. Wie wird eine Fläche gemessen?

1) **Ueberhaupt** wird eine Quadratfläche von bestimmter Größe, welche wieder in kleinere gleiche Quadratflächen eingetheilt wird, zum Maaßstabe angenommen, und alsdenn gefunden, wie vielmal diese Fläche, oder deren Theile in der Fläche, welche gemessen werden soll, enthalten sey.

Anmerk. 1) Um die Ausmessung der Flächen der oben angezeigten Ausmessung gerader Linien gleichförmig zu machen, nimmt man eine Quadratruthe, d. i. ein Quadrat, welches eine Ruthe lang und breit ist, zum Maaß der Flächen an, welche wieder in Quadratfuß, d. i. in kleinere Quadrate, deren jedes einen Fuß, und in Quadratzolle, d. i. in kleinere Quadrate, deren jedes einen Zoll lang und breit ist, eingetheilt wird. Die 44ste Figur stellt ein solches Maaß vor. Wenn die Seiten AB, BC eine Ruthe bedeuten, so ist das Quadrat ABCD eine Quadratruthe.

Jede

Jede Seite derselben ist nach geometrischen Maaß in zehn gleiche Theile, welche also Füße bedeuten, getheilt, und die zusammengehörigen Theilungspuncte sind durch gerade Linien vereinigt worden, wodurch hundert kleinere Quadrate entstanden sind, deren jedes einen Fuß lang und breit, folglich ein Quadratfuß ist. Eine Quadratruthe enthält demnach 100 Quadratfuß. Wenn jedes dieser kleineren Quadrate auf eine ähnliche Art, wie die Quadratruthe getheilt würde, oder wenn man sich nunmehr vorstellt, daß AB einen in seine zehn Zolle getheilten Fuß, folglich ABCD einen Quadratfuß bedeute, so erhellt, daß ein Quadratfuß 100, folglich eine Quadratruthe 10000 Quadratzolle enthalte. Diese Theilung kann auch auf Quadratlinien fortgesetzt, und das hier gesagte leicht darauf angewendet werden.

2) Eine Quadratruthe enthält nach rheinländischem Maaß 12mal 12, d. i. 144 Quadratfuß, jeder Quadratfuß enthält 144 Quadratzolle, u. s. w. Bey größeren Flächen z. B. bey beträchtlichen Theilen der Oberfläche der Erde wird gewöhnlich eine Quadratmeile, d. i. ein Quadrat, welches eine Meile lang und breit ist, zum Maaß angenommen.

3) Messungen auf dem Felde, oder sonst, mit der Quadratruthe oder Quadratfuß, so wie es mit der Längenruthe geschieht, vorzunehmen, würde oft unmöglich, allemal aber unbequem seyn. Die folgenden Vorschriften lehren den Flächeninhalt in Quadratmaaß, ohne unmittelbare Messung mit demselben, aus bloßem Längenmaaß finden.

2) **Insonderheit** kann der Flächeninhalt der bisher betrachteten Figuren folgendergestalt berechnet werden:

a) Wenn die gegebene Fläche ein **Rechteck** ist, z. B. ABDC Fig. 43., so werden die beyden Seiten BD, AB, deren eine die Grundlinie, die andere die Höhe desselben ist, durch einerley Längenmaaß gemessen, und die Zahlen, welche die Größe beyder Seiten in einerley Theilen des Maaßes ausdrücken, multiplicirt. Das Product ist der Flächeninhalt des Rechtecks in demjenigen Quadratmaaß, welches von den Theilen des Längenmaaßes seine Benennung hat, auf welche sich die Factoren beziehn.

z. B.

Z. B. Es sey BD = 4′, AB = 7′, so beträgt der Inhalt des Rechtecks 4 × 7 d. i. 28 Quadratfuß.

Anmerk. Die 43ste Figur stellt vor, wie diese Rechnung zu verstehen sey. Wenn BD = 4 Fuß gefunden wird; so wird daraus geschlossen, daß bey einer wirklichen Messung mit dem Quadratmaaß QM auf BD ein Quadratfuß viermal Raum haben würde, oder daß 4 Quadratfuß auf BD neben einander würden gelegt werden können. Und wenn ferner AB = 7′ gefunden wird, so wird daraus geschlossen, daß den ganzen Raum des Rechtecks über BD sieben Reihen, in deren jeder 4 Quadratfuß liegen, d. i. überhaupt 7mal 4 oder 28 Quadratfuß füllen würden. Eigentlich entsteht also hier die Zahl 28, indem 4 Quadratfuß mit der unbenannten Zahl 7 multiplicirt werden.

Beyspiele zur Uebung. (1) Es sey die Grundlinie eines Rechtecks 1° 6′ 5″, die Höhe 1° 5′ nach geometrischem Maaß, so müssen zuvörderst beyde Zahlen so verwandelt werden, daß sie sich auf einerley Theile des Maaßes, nemlich hier auf Zolle, beziehen: demnach ist die Grundlinie 165″ die Höhe 150″. Folglich ist die Rechnung nach den vorhin angezeigten Gründen folgende:

165 Quadratzolle in einer Reihe
150 Reihen

8250
165

24750 Quadratzolle, oder 2° 47′ 50″ Q. M. welches der gesuchte Inhalt des Rechtecks ist.

(2) Es sey die Grundlinie eines Rechtecks 2° 6′ und die Höhe 1° 9′ in rheinländischem Maaß, so ist die Rechnung folgende:

I. Grundl. 2° 6′ — II. 30′ Q. M. in einer Reih. — III. 144) 630 (4° 54′ Q. M. Inhalt des Rechtecks.
12 — 21 Reihen — 576
30′ — 630′ Q. M. Inhalt des Rechtecks. — 54
Höhe 1° 9′
12
21′

Hier sind zuvörderst (I.) die Ruthen in Fuß verwandelt, hierauf ist (II.) die Berechnung selbst gemacht, und endlich (III.) das Product wieder in Quadratruthen verwandelt worden.

b) Wenn die gegebene Fläche kein Rechteck ist; so ist überhaupt zu bemerken, daß, da zu jeder der im vor-

2) Aus dem Inhalt eines Parallelogramms wird umgekehrt durch die Division dessen Höhe, wenn die Grundlinie, oder dessen Grundlinie, wenn die Höhe bekannt ist, gefunden. Aus dem Inhalt eines Quadrats aber findet man dessen Seite, wenn aus dem Inhalt die Quadratwurzel gezogen wird.

3) Aus zwoen gegebenen Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks wird durch Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes die dritte Seite gefunden, indem die Quadrate der beyden gegebenen Seiten berechnet, und entweder aus der Summe oder aus der Differenz der Quadrate die Quadratwurzel gezogen wird, je nachdem entweder die größte Seite des Dreyeck, oder eine dieser übrigen zu finden ist. Die gefundene Wurzel giebt die gesuchte Seite. Es sey in Fig. 25. FG zu berechnen, wenn EF = 1, folglich CG und CF jede = $\frac{1}{2}$ oder 0,5 ist; so ist die Rechnung folgende:

$FC^q = 0{,}25$

$CG^q = 0{,}25$

$FG^q = 0{,}50$ | 00 | 00 | 00 | 0,7071 . . = FG

49

10000
1407
9849

15100
14141

959

d. i. FG beträgt 7 Zehntel ꝛc. Ruthen oder Schuh ꝛc. nachdem EF 1 Ruthe oder 1 Schuh ꝛc. beträgt. $\frac{1}{2}$ FG oder Fh ist 0,1414.. Demnach beträgt eine gerade Linie, die = 3 EF + Fh wäre 3,1414... wenn EF = 1 ist. Dies erläutert die oben Fr. 15. Anmerk. 4. gegebene Vorschrift.

3) Wenn die gegebene Fläche ein **Trapezium** ist, wie Fig. 42. so wird dasselbe durch eine Diagonallinie AD in zwey Dreyecke ABD, ACD getheilt, und der Flächeninhalt eines jeden Dreyecks berechnet. Die Summe des Inhalts beyder Dreyecke ist der Inhalt des Trapezii.

Anmerk.

Anmerk. Wenn die Diagonale AD zur gemeinschaftlichen Grundlinie beyder zu berechnenden Dreyecke angenommen wird, folglich Ba, Cb die Höhen sind; so findet man den Inhalt des Vierecks mit einigem Vortheil der Rechnung, wenn man sogleich die Summe beyder Höhen Ba + Cb mit der halben Grundlinie AD multiplicirt. Das Product giebt den gesuchten Inhalt. Wenn ein Trapezium zwo gleichlaufende Seiten hat, wie z. B. Bb cC Fig. 33., wenn BC = bc, und diese zu den Grundlinien der beyden Dreyecke BbC, bCc angenommen werden; so haben beyde Dreyecke eine gemeinschaftliche Höhe de. Der Inhalt eines solchen Trapezii wird, gleichfalls mit einigem Vortheil der Rechnung, gefunden, wenn man sogleich die Summe beyder Grundlinien mit der halben Höhe multiplicirt. Das Product giebt den gesuchten Inhalt. Beyde Vortheile gründen sich darauf, daß, wenn zwo Zahlen mit einerley dritten Zahl zu multipliciren und die Producte zu addiren sind, der Richtigkeit der Rechnung unbeschadet, auch die Addition zuerst geschehen, und sodenn die Summe multiplicirt werden kann.

4) **Wenn die gegebene Fläche ein ordentliches Vieleck**, z. B. ABCDEFG Fig. 47. ist, so wird zuvörderst eine Seite desselben AB und die Höhe Ca eines der gleichschenklichten Dreyecke ABC gemessen. Die gefundene Seite wird hierauf so vielmal genommen, so viele Seiten das Vieleck hat, und dieses Vielfache mit der halben Höhe, oder das halbe Vielfache mit der ganzen Höhe Ca ꝛc. multiplicirt.

Z. B. Wenn in Fig. 47. AB = 3′ 2″ und Ca = 3″ 1‴; so ist 7 × 32 = 224″ und ½ × 224 × 31 = 3472‴ Q. M. oder 34′ 72″ Q. M. welches der Inhalt des Siebenecks ist.

5) **Wenn die gegebene Fläche ein unordentliches Vieleck** ist, z. B. Fig. 51. ABCDEFG, so wird dasselbe in Dreyecke getheilt, deren Grundlinien und Höhen gemessen, und daraus ihr Flächeninhalt berechnet. Die Summe des Inhalts aller Dreyecke giebt den gesuchten Inhalt der Figur.

Ein Beyspiel der Berechnung des Vielecks Fig. 51. wird unten gegeben werden.

Anmerk. Zuweilen kann zum Vortheil der Zeichnung sowol, als der Rechnung folgendergestalt verfahren werden. Man vereinigt zwo Ecken der Figur, z. B. F und B durch eine gerade Linie FB, und zieht gegen diese Linie aus allen übrigen Ecken der Figur senkrechte Linien wie EM, GN, AO, DP, CQ. Diese theilen das Vieleck in Figuren, wovon die beyden äußersten FEM, BCQ Dreyecke, die übrigen aber Trapezia mit zwo gleichlaufenden Seiten sind MENG, NGAO, AODP, DPQC. Wenn diese gleichlaufenden Seiten durchgängig für die Grundlinien der Dreyecke und Trapezien angenommen werden, so enthält die Linie FB die ihnen zugehörigen Höhen. Z. B. FK ist die Höhe des Dreyecks FME, KI die Höhe des Trapezii MENG, wenn ME, NG die Grundlinien sind, u. s. w. Die Summe des Inhalts aller Dreyecke und Trapezien ist der gesuchte Inhalt des Vielecks, wenn, wie vorausgesetzt wird, die gewählten Ecken F und B eine solche Lage haben, daß die aus den übrigen Ecken bis zu den gegenüberstehenden Puncten des Umfangs der Figur gezogenen und gegen FB senkrechten Linien ganz innerhalb der Figur fallen.

6) Wenn die gegebene Fläche ein **Kreis**, und dessen Durchmesser bekannt ist; so wird aus dem Durchmesser (nach Fr. 15.) der Umkreis berechnet, und derselbe mit der Hälfte des Halbmessers, d. i. mit dem vierten Theil des Durchmessers multiplicirt. Das Product giebt den Flächeninhalt des Kreises.

Es kann auch, wenn es bequemer ist, der vierte Theil des Umkreises mit dem Durchmesser, oder der halbe Umkreis mit dem halben Durchmesser; oder der ganze Umkreis mit dem ganzen Durchmesser multiplicirt, und im letztern Fall das Product mit 4 dividirt werden. Z. B. Es sey der Flächeninhalt eines Kreises zu finden, dessen Durchmesser 1719 geographische Meilen beträgt; so wird zuvörderst geschlossen: Wie 113 zu 355, so 1719 Meilen zum Umkreise, da 5400 Meilen herauskommen, welche mit 1719 multiplicirt 9282600 zum Product geben. Der vierte Theil dieses Products ist 2320650; daher beträgt der Flächeninhalt des gegebenen Kreises 2320650 Quadratmeilen.

Anmerk.

Anmerk. 1) Wenn von zween Kreisen der Durchmesser des ersten zweymal so groß ist, als der Durchmesser des andern, so ist auch der Umfang des ersten zweymal so groß, als der Umfang des andern, folglich das Product aus des ersten Durchmesser und Umfang viermal so groß, als dasselbe Product bey dem andern, und weil die vierten Theile dieser Producte eben dasselbe Verhältniß gegen einander haben, so ist der erste Kreis selbst viermal so groß als der andere, so wie das Quadrat des Durchmessers des ersten Kreises viermal so groß als das Quadrat des Durchmessers des andern ist. Eben so folgt, daß wenn von zween Kreisen der Durchmesser des einen **dreymal**, **viermal** u. s. w. so groß ist, als der Durchmesser des andern, der erste Kreis selbst **neunmal**, **sechszehnmal** u. s. w. so groß seyn müsse, als der andere, so wie das Quadrat des Durchmessers des ersteren Kreises **neunmal**, **sechszehnmal** u. s. w. so groß als das Quadrat des Durchmessers des andern ist. **Ueberhaupt also verhalten sich jede zween Kreise zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.**

2) **Wenn daher der Durchmesser irgend eines Kreises = 1 gesetzt wird**, so ist das Quadrat des Durchmessers gleichfalls 1, und der Cirkel selbst wird, wenn die Verhältniß 1 : 3,14 . . . angenommen wird, 0,785 . . . gefunden, welches Tausendtheile von Quadratruthen oder Quadratfußen ꝛc. bedeutet, je nachdem der Durchmesser 1 Ruthe oder 1 Fuß ꝛc. beträgt. Der Durchmesser eines andern Kreises sey 50°; so ist sein Quadrat 2500 Quadratruthen. Wenn man daher folgendergestalt schließt: Wenn das Quadrat des Durchmessers 1 Quadratruthe ist; so ist der Kreis 0,785 desselben Maaßes, wie groß ist ein Kreis, dessen Quadrat des Durchmessers 2500 Quadratruthen beträgt? so findet man den Inhalt des Kreises noch auf eine andere Art. Es entsteht nemlich folgende Proportion:

1 : 2500 = 0,785 : 1962,5

wo das letzte Glied, welches 1962,5 Quadratruthen, oder 1962° 50′ Q. M. anzeigt, der gesuchte Inhalt des Kreises ist.

3) Wenn umgekehrt der Inhalt eines Kreises gegeben, und derselbe z. B. 17662,5 Quadratfuß ist, so wird der Durchmesser folgendergestalt gefunden: Man schließt zuvörderst: Wenn der Inhalt eines Kreises 0,785 Quadratfuß beträgt; so ist das Quadrat seines Durchmessers 1 Quadratfuß, wie groß ist das Quadrat des Durchmessers desjenigen Kreises, dessen Inhalt 17662,5 Quadratfuß ist? Hierauf wird aus der hiedurch gefundenen Quadratzahl die Quadratwurzel ausgezogen, welche den gesuchten Durchmesser, hier in Fußen, überhaupt aber jedesmal in dem-

jenigen Längenmaaß giebt, auf welches sich das Quadratmaaß bezieht, in welchem das Quadrat des Durchmessers gefunden war. Die Rechnung ist folgende:

1. 0,785 : 1 = 17662,5 : vierte Prop. z. U. 2 | 25 | 00 | 150 der gesuchte Durchmesser.
785)1766250(2250 D. M.
1570
1962
1570
3925
3925
60

4) Aehnliche Figuren verhalten sich überhaupt gegen einander, wie die Quadrate der in ihnen ähnlich liegenden Seiten, z. B. jeder zwoer Seiten, an welchen die zusammengehörigen gleichen Winkel beyder Figuren liegen. Z. B. In Fig. 54. ist

$$ABC : abc = AB^{q} : ab^{q}$$

Aehnliche Dreyecke und ähnliche Parallelogramme verhalten sich auch, wie die Quadrate ihrer Höhen.

5) Der Flächeninhalt des Abschnitts eines Kreises wird berechnet, indem seine Sehne mit $\frac{2}{3}$ seiner Höhe multiplicirt wird. Das Product giebt den Inhalt des Abschnitts mit einem desto geringeren Fehler, je kleiner Sehne und Höhe desselben sind. Ist ein gegebener Abschnitt, z. B. HAIH Fig. 3. merklich groß; so werden in ihm kleinere Abschnitte, wie HdAH, AmIA gemacht, und diese nebst dem Dreyeck AHI berechnet. Den Inhalt eines Ausschnitts, dessen Halbmesser und Bogen, letzterer in Graden, gegeben ist, wodurch folglich auch die Verhältniß des Bogens zum Umkreise bekannt wird, findet man, indem aus dem Halbmesser zuvörderst der Umkreis, ferner aus dem Umkreise der Bogen berechnet, und dieser mit der Hälfte des Halbmessers, oder seine Hälfte mit dem ganzen Halbmesser ꝛc. multiplicirt wird. Das Product ist der gesuchte Inhalt.

Ist z. B. der Bogen 50°, so ist er $\frac{50}{360}$ oder $\frac{5}{36}$ des Umkreises, u. s. w.

6) Eine Fläche quadriren, heißt ein Quadrat finden, welches mit ihr einerley Inhalt hat, oder auch überhaupt, ihren Flächeninhalt finden. Es ist nemlich die Zahl der Seite des ihr gleichen Quadrats die Quadratwurzel aus ihrem Flächeninhalt, daher, wenn dieser bekannt ist, das der Fläche gleiche Quadrat leicht gefunden wird. In sofern die Verhältniß, auf welche sich die Berechnung des Kreises gründet, irrational ist, kann derselbe zwar nur durch Näherung, jedoch mit weit größerer Genauigkeit, als

als jemals nöthig werden kann, quadrirt werden, indem diese irrationale Verhältniß auf überflüßig viele Decimalstellen berechnet ist. Die Erfindung einer Quadratur des Kreises, welche sich auf eine rationale Verhältniß gründen, ist demnach entbehrlich, zumal da es sehr unwahrscheinlich ist, daß, wenn es überall eine solche Verhältniß giebt, dieselbe in kleinen Zahlen anzugeben sey. Würde diese rationale Verhältniß in eine andere verwandelt, deren erstes Glied 1 ist; so müßte die Rechnung für das zweyte Glied die Zahlen 3,141592 . . . u. s. w. nach der Ordnung, wie sie gefunden sind, geben. Hieraus erhellet, wie eine jede von vermeinten Erfindern dieser Quadratur angegebene Verhältniß leicht zu prüfen sey. Die Vorschriften, ein Quadrat durch Zeichnung zu finden, welches jeder gegebenen geradlinigten Figur oder einem Kreise gleich sey, sind aus dem Vorhergehenden leicht herzuleiten, indem zu einer jeden Figur entweder ein ihr gleiches Rechteck, oder mehrere Rechtecke, deren Summe der Figur gleich ist, zu jedem Rechteck aber ein ihm gleiches Quadrat, und zu mehreren Quadraten wieder ein einziges Quadrat gefunden werden kann, welches ihrer Summe gleich ist. Zu einem jeden Quadrate oder Parallelogramm, folglich auch zu einer jeden andern Figur kann auch ein ihr gleiches Dreyeck gefunden werden. Für Anfänger sind dergleichen Verwandlungen der Figuren zur Uebung sehr vortheilhaft.

7) Die Größe des Flächeninhalts einer Figur muß allemal von der Größe des Umfangs derselben wohl unterschieden werden. Denn es kann eine Figur einen viel größern Umfang haben als eine andere, und doch in Ansehung ihres Flächeninhalts kleiner seyn. Z. B. Ein Parallelogramm, welches mit ABDC Fig. 43. gleiche Höhe, aber eine kleinere Grundlinie hätte, würde kleiner als ABDC seyn. Wenn aber einer seiner Winkel, wie b in abdc, sehr spitz wäre, so würde der Umfang dieses Parallelogramms ungleich größer als der Umfang des Rechtecks ABDC seyn. Unter verschiedenen ordentlichen Figuren von gleichem Umfange ist allemal diejenige die kleinste, welche die wenigsten, und diejenige die größte, welche die meisten Ecken hat. Daher ist ein Kreis die geräumigste Figur, ein ordentliches Vieleck, dessen Umfang so groß ist, als der Umfang eines Kreises, ist kleiner, ein unordentliches von eben so vielen Seiten noch kleiner als der Kreis; ein Quadrat ist kleiner als ein ordentliches Vieleck von gleichem Umfange, ein unordentliches Viereck noch kleiner; ein gleichseitiges Dreyeck ist kleiner als ein Quadrat von gleichem Umfange, und ein ungleichseitiges Dreyeck noch kleiner. Z. B. Eine runde Kirche, welche 400 Fuß im Umfange hat, kann mehr Leute in sich fassen, als eine viereckte, deren jede Seite 100 Fuß lang ist. In einem viereckten Garten können mehr Bäume stehn, als in einem dreyeckigen, dessen Zaun eben so lang ist. Hierbey ist noch anzumerken, daß die Bäume in einem

Garten, oder die Pflanzen auf einem Beete am vortheilhafteſten gepflanzt werden, wenn man ſie ſo ſetzt, wie in der 5ſten Figur durch Puncte angezeigt worden, weil alsdenn die Zweige und Wurzeln ſich nicht nur ungehinderter als in einer jeden andern Stellung ausbreiten, folglich ihrer mehrere in demſelben Umfange gepflanzt werden können, ſondern auch die Bäume alsdenn lauter Alleen bilden.

§7. Wie kann ein Feld, Gärten, Teich, oder ganze Landſchaft ausgemeſſen, in einen Grundriß gebracht und der Flächeninhalt davon berechnet werden?

1) Es werden alle Seiten des Feldes mit einer Meßſchnur, oder Meßkette, oder Maaßſtabe, und alle Winkel, welche dieſelben mit einander machen, mit einem Winkelmeſſer nach Fr. 14. und 16. gemeſſen und ordentlich aufgeſchrieben.

2) Wird ein verjüngter Maaßſtab, wie Fig. 23., oder, wenn man auch die Zolle beſtimmen will, wie Fig. 24. verfertigt, und aus demſelben vermittelſt eines Cirkels eine Linie genommen, welche in verjüngtem Maaße eben ſo viel Ruthen, Fuß und Zolle enthält, als die erſte auf dem Felde gemeſſene Seite der Fläche im großen Maaße enthielt. Dieſe Linie wird auf einem hinlänglich geräumigen Papier, welches auf einem ebenen Tiſche liegt, oder über ein Reißbrett ausgeſpannt worden, gezeichnet.

3) Wird vermittelſt eines Transporteurs Fig. 26. oder des Inſtruments Fig. 28. der Winkel, welchen die eine an der erſten liegenden Seite mit der erſten auf dem Felde einſchließt, an die erſte Seite auf dem Papier geſetzt, und dieſe zwote Linie nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo lang gemacht, als die zwote auf

auf dem Felde gemessene Seite der Fläche im großen Maaße.

4) Wird auf eben diese Weise die dritte, vierte, fünfte ꝛc. Seite der gemessenen Fläche nach dem verjüngten Maaßstabe und unter den gehörigen Winkeln auf das Papier getragen, bis man endlich, wenn alle Seiten bis auf zwo, und alle Winkel bis auf einen, welche sich nemlich bey der Zeichnung von selbst ergeben, aufgetragen worden, eine kleine Figur erhält, welche dem gemessenen Felde ähnlich seyn muß, und den Grundriß dieses Feldes giebt, in welchen man hernach alle merkwürdige Umstände des Feldes, z. B. Gränzsteine, Wege, Flüße, zeichnen kann, wenn deren Entfernungen von den Seiten des Feldes durch Messung gefunden sind.

Anmerk. Daß eine solche auf dem Papier gezeichnete Figur der auf dem Felde gemessenen ähnlich sey, erhellet folgendergestalt: Die Figur auf dem Papier hat mit der auf dem Felde gemessenen einerley Winkel, die Seiten aber, welche die gleichen Winkel einschließen, verhalten sich (nach Fr. 14. Anmerk. 5.) sämtlich wie ihre Maaße, d. i. wie die verjüngte Ruthe zur Meßkettenruthe; nemlich es ist

AB auf d. Papier : AB a. d. Felde = verjüngte Ruthe : Meßkettenruthe.
BC " " : BC " " = " " : " "
u. s. w.
Folglich AB auf d. Pap. : AB auf d. Felde = BC a. d. Pap. : BC a. d. F.
u. s. w.

Beyde Figuren haben demnach sämtliche zur Aehnlichkeit erforderliche Eigenschaften.

5) Wird der Flächeninhalt dieses Grundrisses nach denen im Vorhergehenden gegebenen Vorschriften in verjüngtem Quadratmaaß berechnet, und dadurch zugleich der Flächeninhalt des ganzen Feldes im großen Quadratmaaß gefunden.

Z. B. Es sey ein Feld ausgemessen worden, welches 7 Seiten hat. Die erste enthalte 8° 5′; die andere 5° 2′; die dritte 4° 7′ 9″; die vierte 5° 9′ 2″; die fünfte 5° 8′ 9″; die sechste 6° 7′ 2″; die siebente 2° 5′. Der

Winkel zwischen der ersten und zweyten Seite sey 129° 45′, zwischen der zweyten und dritten 139° 15′, zwischen der dritten und vierten 109°, zwischen der vierten und fünften 150°, zwischen der fünften und sechsten 120° 30′, zwischen der sechsten und siebenten 131°, zwischen der siebenten und ersten 120° 30′.

Nun sey AB Fig. 51. nach dem verjüngten Maaßstabe MN so groß gemacht, als die erste Seite des Feldes, folglich 8° 5′; an AB sey der Winkel ABC von 129° 45′ gesetzt, und BC im verjüngten Maaße so groß gemacht, als die zweyte Seite, folglich 5° 2′; an BC sey der Winkel BCD von 139° 15′ gesetzt, und CD so groß als die dritte Seite u. s. w. so wird die Figur ABCDEFG der Grundriß des ausgemessenen Feldes seyn. Dieser Grundriß wird nun nach dem Vorhergehenden entweder in lauter Dreyecke, oder auch in Dreyecke und Trapezia mit zwo parallelen Seiten getheilt, und sodann berechnet. Hier soll nur die Berechnung nach der ersten Art gezeigt werden. Es ist also der Grundriß durch die Linien GB, FB, EB, EC in fünf Dreyecke getheilt. In dem ersten Dreyecke GAB beträgt die Grundlinie GB nach dem verjüngten Maaßstabe 10° 7′ 1″, die Höhe AH 2° 4′. In dem andern Dreyeck GBF ist die Grundlinie FB 12° 4′ 3″, die Höhe GI 5° 7′ 9″; in dem dritten Dreyeck FBE ist die Grundlinie FB die vorige, die Höhe EK aber 5° 1′ 6″; in dem vierten Dreyeck EBC ist die Grundlinie EB 10° 8′ 8″, die Höhe CL 4° 1′ 2″; in dem fünften Dreyeck ECD ist die Grundlinie EC 8° 7′ 4″, die Höhe DR aber 3° 0′ 6″. Die Berechnung des Flächeninhalts dieser 5 Dreyecke ist folgende:

I. Berechnung des Dreyecks GAB.

GH = 1071″ — 1071″ Q. M.
AH = 120″ — 120

21420
1071

GAB = 128520″ Q. M.

II. Berechnung der Dreyecke GBF und FEB, oder des Trapezii GBFE

FB = 1243″ — 1243″ Q. M.
EK = 516″
GI = 579″ — 1095

EK + GI = 1095″ — 6215
11187
1243

1361085″ Q. M.

GBF + FEB = 680542,5″ Q. M.

III. Be-

III. Berechnung des Dreyecks BCE.

BE = 1088′′ 1088′′ Q. M.
½ CL = 206′′ 206

6528
2176

BCE = 224128′′ Q. M.

IV. Berechnung des Dreyecks CDE.

CE = 874′′ 874′′ Q. M.
½ DR = 153′′ 153

3622
4370
874

133722′′ Q. M.

GAB = 128520′′ Q. M.
GBF + FEB = 680542,5
BCE = 224128
CDE = 133722

ABCDEFG = 1166912,5′′ Q. M.
d. i. 116° 69′ 12,5′′ Q. M.

Dieses ist also auch der Flächeninhalt des ganzen Feldes im großen Quadratmaaße.

Anmerk. 1) Es wäre nicht nöthig gewesen, die beyden letzten Seiten FG und GA, nebst dem Winkel FGA, welchen sie einschließen, oder die letzte Seite GA nebst den beyden Winkeln FGA und GAB, welche an dieser Seite liegen, zu messen, weil sich diese Stücke in dem Risse von selbst geben; indessen dient die wirkliche Messung derselben dazu, daß man dadurch von der Richtigkeit der ganzen Ausmessung versichert werde. Ob sämmtliche Winkel richtig gemessen sind, findet man, wenn man ihre Summe sucht. Diese muß nach dem Vorhergehenden so vielmal 180° als das Vieleck Ecken hat, weniger 360° betragen; z. B. 900°, wenn das Vieleck ein Siebeneck ist. Bey einer solchen Messung können Winkel (wie C Fig. 42* in dem Viereck ABDC), vorkommen, welche größer als 180° sind; mit dem Scheibeninstrument werden, wenn dasselbe nur ein halber Kreis ist, die Ergänzungen dieser Winkel (Fig. 42* ACD in dem Viereck ACDc) zu 360° gemessen. Bey der Summirung der Winkel müssen jedoch diese Winkel selbst in Rechnung gebracht werden. Die Richtigkeit der ganzen Ausmessung eines Feldes überhaupt kann unter andern dadurch geprüft werden, daß man in dem Grundrisse eine oder mehrere gerade Linien aus verschiedenen Puncten des Umfangs der Figur zu andern Puncten desselben zieht, sie nach dem verjüngten Maaßstabe mißt, hernach auf dem gemessenen Felde zwischen den ähnlich liegenden Puncten gerade Linien absteckt, und solche nach dem großen Maaßstabe mißt. Nach demselben müssen sie, wenn die Ausmessung richtig ist, so viel betragen, als die Linien im Grundrisse nach dem verjüngten Maaße. Z. B. Wie in dem Grundrisse Fig. 51. die Linie FB nach dem verjüngtem Maaß 12° 4′ 3′′ beträgt, so muß die gerade Linie zwischen eben diesen Puncten auf

drey Fuß 12° 4′ 3″ nach dem großen Maaße betragen. In ähnlichen Figuren haben nemlich ähnlich liegende Linien einerley Verhältniß mit den Seiten derselben.

2) Wenn die Seite eines Feldes gekrümmt ist, wie Fig. 52. so wird, um diese Krümmung in den Grundriß zu bringen, von dem einen Ende derselben bis zum andern eine gerade Linie ac, und aus mehreren Puncten der Krümmung gegen diese Linie senkrechte Linien, wie bf, eg, dh gezogen; jede derselben wird hierauf nebst ae und ihren Stücken af, fg rc. gemessen, worauf die ganze Figur in den Grundriß gebracht werden kann. Eine solche gekrümmte Figur auf dem Felde, wie acea wird gewöhnlich als ein Abschnitt eines Kreises angesehn, und berechnet, dessen Sehne ac und dessen Höhe die größte der senkrechten Linien über ae ist. Ist die Krümmung sehr groß, so theilt man den angenommenen Abschnitt durch Sehnen, wie ac, ce in kleinere, und berechnet diese. Hat die Krümmung verschiedene Wendungen, wie ilmnop; so wird sie gleichfalls in mehrere Abschnitte getheilt. Es ist leicht einzusehn, daß, wenn ein Feld solche gekrümmte Seiten hat, der Riß desselben so in Dreyecke eingetheilt werden müsse, daß die Linien im und np Seiten der Dreyecke werden, und daß alsdenn der Inhalt einer auswärts gehenden Krümmung zu dem Inhalt des Dreyecks, dazu sie gehört, addirt, einer einwärts gehenden Krümmung aber davon abgezogen werden müsse, um den wahren Inhalt des ganzen Feldes zu finden.

3) Wenn die Seiten des Feldes über Anhöhen und Berge gehen, so muß nicht die über einen Berg gemessene Länge der Seite in den Grundriß gebracht werden, weil sonst die Ecken des Feldes zu weit auseinander kommen würden; sondern man muß entweder nach der in der folgenden 28sten Frage gegebenen Anweisung die Entfernung zwoer Ecken, zwischen welchen der Berg liegt, messen, oder nach der 29sten Frage zuerst die Höhe, und daraus ferner die Grundlinie des Berges finden, welche letztere in dem Grundrisse gezeichnet wird. Es ist hiebey noch zu bemerken, daß auf einem Berge nicht mehr Bäume stehen können, als auf einer Ebene, welche so groß ist als die Grundfläche des Berges, weil die Bäume alle senkrecht gegen diese Grundfläche wachsen.

4) Eine gegebene Figur in gleiche Theile zu theilen, z. B. ein Stück Feld, Wiese und dergleichen unter mehrere Personen gleichförmig zu vertheilen, muß zuvörderst die Figur gemessen, in Grundriß gebracht, und ihr Flächeninhalt berechnet seyn. Folgendes Beyspiel lehrt, wie sodann die Theilung selbst vorgenommen werden könne. Es sey ein Trapezium auf dem Felde in zween gleiche Theile zu theilen, und ABDC Fig. 42. stelle den Grundriß desselben vor. Die gemeinschaftliche Grundlinie AD beyder Dreyecke ABD, ACD, in welche das Trapezium getheilt ist, sey 8° 3′

die Höhe Ba sey 5° 2′ und Cb sey 7° 9′; so ist der Flächeninhalt des Dreyecks

ABD = 2158′ Q. M.
ACD = 3278,5′ Q. M.

folglich ABDC = 5436,5′ Q. M.

und $\frac{1}{2}$ ABDC = 2718,25′ Q. M.

Demnach ist ABD kleiner und ACD um [illegible] so viel größer als die Hälfte des Vierecks ABDC; um zwar ist z. B.

$\frac{1}{2}$ ABDC — ABD = 560,25′ Q. M.

Zu dem Dreyeck ABD muß folglich ein Raum von 560,25′ Q. M. addirt werden. Dies geschieht, indem an die Grundlinie AD ein Dreyeck gesetzt wird, dessen Inhalt 560,25′ Q. M. und dessen Höhe aus dem Inhalt und der Grundlinie nach dem obigen 13,5′ gefunden wird. Demnach wird aus einem willkührlichen Punct der AD eine senkrechte Linie = 13,5′ errichtet, oder hier wird bequemer von der schon vorhandenen senkrechten Linie Cb, ein Stück bd = 13,5′ genommen; hierauf durch d die Linie cE mit AD gleichlaufend, und endlich AE gezogen, so ist das Dreyeck ADE das gesuchte, und ABDE = $\frac{1}{2}$ ABDC. Wenn sodann DE gemessen, und auf dem Felde eben so groß gemacht wird, so kann durch die Linie AE die Theilung geschehen. Wäre das Viereck in drey gleiche Theile zu theilen; so würde, weil $\frac{1}{3}$ ABDC = 1812,17 folglich z. B. ACD — $\frac{1}{3}$ ABDC = 1466,34′ Q. M. zuvörderst ein Dreyeck von ACD, welches diesen Inhalt und AD zur Grundlinie hätte, abzuziehn seyn. Es sey dasselbe AFD; so ist CAF = $\frac{1}{3}$ ABDC und ABDF = $\frac{2}{3}$ ABDC: welches, wie vorhin, wieder in zween gleiche Theile AFDH, HBD getheilt wird.

23. Wie kann die Weite zweener Oerter von einander gemessen werden, wenn man entweder gar nicht oder nicht in gerader Linie von dem einen zu dem andern kommen kann?

a) Wenn man zwar zu beyden Oertern, aber nicht in gerader Linie von dem einen zu dem andern kommen kann, z. B. wenn die Weite des Hauses A Fig. 53. von dem Baum B, zwischen welchen ein Teich oder Morast liegt, gemessen werden soll; so wird 1) ein willkührlicher

Punct

Punct C, aus welchem man nach A und B in gerader Linie kommen kann, angenommen, und die Weite deſſelben ſowohl von A als B gemeſſen, 2) wird der Winkel ACB gemeſſen, 3) werden auf dem Papier oder einer Tafel zwo Linien [illegible] cn gezogen, welche einen Winkel einſchlieſſen, der dem gemeſſenen gleich iſt, beyde Linien aber werden nach dem verjüngten Maaßſtabe ſo lang gemacht, als die gemeſſenen im großen Maaße ſind. Die Entfernung mn der beyden Endpuncte dieſer Linien, nach dem verjüngten Maaßſtabe gemeſſen, giebt die Weite des Hauſes von dem Baum im großen Maaße.

Anmerk. 1) Die Meſſung des Winkels ACB geſchieht durch den Winkelmeſſer; es kann aber auch derſelbe, ſo wie überhaupt das ganze Dreyeck cmn vermittelſt des Meßtiſches ſogleich durch Zeichnung erhalten werden, welches bequemer iſt, auch mehr Genauigkeit der Meſſung verſpricht. Uebrigens iſt ACB ∽ cmn, weil C=c, und cm:AC=cn:BC. Daher iſt auch cm:AC=mn:AB, woraus nach dem Obigen folgt, daß AB nach dem großen Maaß ſo viel, als mn nach dem verjüngten Maaß, beträgt.

2) Es können auch die geraden Linien AC und BC über C verlängert, und CE=AC, CD=BC gemacht werden, da denn die Dreyecke ACB, CDE wegen der Gleichheit der Winkel bey C und der Seiten, welche die Winkel einſchlieſſen, gleich ſind, folglich auch AB=DE iſt, welche ſogleich gemeſſen werden kann, in welchem Falle man weder Winkelmeſſer noch Zeichnungen nöthig hat. Sollte die Ebene hinter C nicht groß genug ſeyn, die ganzen Längen der Linien AC und BC in dieſelbe zu tragen, ſo darf man nur die Hälfte oder Drittel ꝛc. derſelben über C nach CE, CD oder auch zurück von C gegen A und B tragen; da denn die Entfernung der Endpuncte dieſer verlängerten Linien, oder der auf CA, CB abgeſchnittenen Theile die Hälfte oder den dritten Theil ꝛc. der Weite AB giebt.

b) Wenn man nur zu einem von den beyden Oertern kommen kann; z. B. wenn die Entfernung des Hauſes A Fig. 54. von einem Thurme B, der

jens

jenseit eines Flusses steht, gemessen werden soll, so wird 1) ein willkührlicher Punct C, aus welchem man nach A in gerader Linie kommen kann, angenommen, und die Weite desselben von A gemessen, 2) wird sowol der Winkel BAC als ACB gemessen, 3) wird auf dem Papiere eine Linie ac gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die Linie AC im großen Maaße, an die beyden Endpuncte dieser Linie aber werden zwo andere Linien ab, bc unter Winkeln, die den gemessenen gleich sind, bac = BAC, bca = BCA, angesetzt, welche sich in b durchschneiden. Die Linie ab, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Weite AB im großen Maaß.

Anmerk. Wegen der Gleichheit der Winkel ist nemlich ABC ∽ abc, folglich ca : CA = ab : AB, und da ca : CA = verjüngt. Maaß : Meßkettenmaaß; so haben ab, AB eben diese Verhältniß zu einander. Uebrigens kann auch in diesem Fall vermittelst des Meßtisches das Dreyeck abc unmittelbar erhalten werden.

c) Wenn man zu keinem von beyden Oertern kommen kann; z. B. wenn die Weite zweener Thürme in einer Stadt, in die man nicht kommen kann, A und B Fig. 55. gemessen werden soll; so werden 1) zween Puncte C und D auf dem Felde vor der Stadt willkührlich, jedoch desto weiter von einander entfernt angenommen, je größer die zu messende Weite AB nach dem Augenmaaß ist; die Weite dieser Puncte oder die Linie CD wird entweder unmittelbar, oder nach dem vorhergehenden ersten oder zweyten Fall, mittelbar gemessen, 2) werden in C die Winkel BCD und BCA oder DCA, ferner in D die Winkel CDA und ADB oder CDB gemessen, 3) wird auf dem

Papier

Papier eine Linie cd gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so lang ist, als die Linie CD, und an jedem Endpunct derselben zwo Linien ca, cb, da, db unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzt. Die Entfernung ab der beyden Puncte, in welchen sich diese Linien einander durchschneiden, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Entfernung der beyden Thürme in der Stadt im großen Maaße.

Anmerk. 1) Weil CDB ∽ cdb und CAD ∽ cad, woraus leicht erweißlich ist, daß auch CAB ∽ cab; so ist

$$cd : CD = cb : CB$$
$$cb : CB = ab : AB$$
folglich $$cd : CD = ab : AB,$$

woraus, wie vorhin, die Richtigkeit des hier gewiesenen Verfahrens folgt.

2) Es kann auf solche Weise eine ganze Gegend oder Landschaft im Grund gelegt, oder eine Charte davon verfertigt werden, wenn man in derselben zween, oder auch nach Erfordern mehrere hinlänglich weit von einander entfernte Standpuncte annimmt, aus denen alle umliegende Städte, Dörfer, Wälder u. s. w. gesehen werden können, die Weite dieser Puncte von einander, und endlich alle Winkel mißt, welche die aus den beyden Puncten nach allen Städten, Dörfern ꝛc. gehende gerade Linien sowol unter einander als mit der zwischen den Standpuncten enthaltenen Linie einschließen; hiernächst aber diese Linie im verjüngten Maaße aufs Papier bringt, und alle gemessene Winkel an die Endpuncte derselben gehörig ansetzt, da denn die Puncte, in welchen sich diese Linien durchschneiden, die Lage aller beobachteten Oerter in derselben Gegend auf Papier bestimmen.

29. Wie kann die Höhe eines Berges, Thurms, Hauses, Baums u. d. gl. gemessen werden?

a) Wenn man in gerader Linie bis an den Fuß des Berges, Thurms ꝛc. kommen kann, und seine höchste Spitze genau über seiner Mitte stehet, z. B. wenn die Höhe des Thurms AB Fig. 56. gemessen werden soll, so kann solches auf folgende zwo Arten geschehn.

aa) Ver-

aa) Vermittelst eines Winkelmessers. Es wird 1) in einiger Entfernung von dem Thurme ein Punct C angenommen, und über denselben der Winkelmesser so gestellt, daß die Fäden der unbeweglichen Diopter in einerley horizontalen Fläche liegen, folglich die Ebene des Winkelmessers vertikal stehe, welches durch ein Bleyloth erhalten werden kann, die bewegliche Diopter aber gegen die Spitze des Thurms A gerichtet sey, wodurch also die Größe des Winkels ACB gefunden wird; 2) wird die Entfernung dieses Puncts von dem Thurme oder die Linie CD, ferner die halbe Breite des Thurms BD, und endlich die Höhe des Stativs des Winkelmessers CE gemessen; 3) wird auf dem Papier eine Linie gezogen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die Summe der Linien DC und DB, folglich als die Linie BC; an dem einen Endpuncte dieser Linie wird eine andere Linie unter dem gemessenen Winkel angesetzt, an dem andern aber eine senkrechte Linie errichtet, welche die an dem ersten Endpuncte angelegte Linie durchschneidet. Die Länge dieser senkrechten Linie, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, giebt die Höhe des Thurms, wenn dazu vorher die Höhe CE des Stativs des Winkelmessers, oder sicherer die Höhe BI, addirt worden.

Anmerk. Wenn nemlich EI nicht genau horizontal ist, so sind BC, EI nicht genau gleichlaufend, folglich auch BI und CE, nicht wie sonst vorausgesetzt werden kann, gleich. Es ist aber der Punct B derjenige, mit welchem die horizontalen Fäden des unbeweglichen Diopterlineals sich decken, daher derselbe, folglich auch die Vertikallinie leicht zu finden ist. Uebrigens erhellt die Richtigkeit des hier gewiesenen Verfahrens leicht aus dem Vorhergehenden.

bb) Ver-

bb) Vermittelst zweener Stäbe von verschiedener Länge. Es wird 1) in willkührlicher Entfernung von dem Thurme ein langer Stab FH Fig. 56. vertikal gestellt; 2) wird ein kleinerer Stab CE gleichfalls vertikal und so errichtet, daß, wenn man das Auge an des kleinern Stabes Spitze C hält, die Spitze des längern Stabes F die Spitze des Thurms A bedeckt, d. i. daß die Puncte C, F, A in einer geraden Linie liegen; 3) wird die Höhe beyder Stäbe, ihre Entfernung von einander EH, und die Entfernung des kleinern Stabes von der Mitte des Thurms, EI gemessen; 4) wird folgendergestalt geschlossen: wie die Entfernung beyder Stäbe von einander EH, zu dem Unterschiede ihrer Höhe FG, also die Entfernung des kleinern Stabes von der Mitte des Thurms EI, zu einer vierten Proportionalzahl, welche, wenn dazu die Höhe des kleinern Stabes addirt wird, der gesuchten Höhe des Thurms gleich ist. Z. B. Es sey die Höhe des kleinern Stabes 4′, des größern 10′, folglich ihr Unterschied 6′, die Entfernung beyder Stäbe von einander 5′, und die Entfernung des kleinern Stabes von der Mitte des Thurms 6° 5′ so ist die Rechnung folgende:

5 : 6 = 65′ : vierte unbek. Zahl.

6	
5) 390	7° 8′ vierte Prop. Zahl.
35	4′ Höhe des kleineren Stabes.
40	8° 2′ Höhe des Thurms.
40	
0	

Anmerk.

Anmerk. 1) Weil FH, CE, AI vertikal, folglich sämtlich auf der Horizontallinie EI senkrecht, und unter einander parallel sind; so ist, wenn auch CB mit EI gleichlaufend gezogen wird, CFG ∽ CAB und CG:FG=CB:BA, woraus, weil CG = BH und EB = EI, die Richtigkeit des hier gewiesenen Verfahrens folgt.

2) Die Höhe des Gegenstandes kann auch durch Hülfe des Schattens, wie auch durch Hülfe eines Spiegels leicht gefunden werden, wozu die Vorschriften in der Optik gegeben werden sollen.

b) **Wenn man nicht in einer geraden Linie bis an den Thurm kommen kann**, oder seine Spitze nicht über der Mitte desselben ist, Fig. 57. so werden 1) in einiger Entfernung von dem Thurm AE zween Puncte C und D, welche mit einem Punct am Fuß des Thurms in einerley gerader Linie liegen, gewählt, und die Entfernung derselben von einander, oder die Linie CD, gemessen; 2) wird der Winkelmesser in den Punct C so, wie bey dem vorhergehenden Fall gelehret ist, gestellt, die beweglichen Dioptern aber zuvörderst gegen die Spitze des Thurms, wodurch der Winkel ACB, und hierauf gegen den Fuß des Thurms gerichtet, wodurch der Winkel BCE gemessen wird; 3) wird der Winkelmesser eben so in den Punct D gestellt, und die Winkel ADB, BDE gemessen; 4) wird auf dem Papier eine gerade Linie gezogen, und auf dieselbe aus dem einen Endpuncte die Länge der Linie CD nach dem verjüngten Maaßstabe getragen; ferner werden an den beyden Endpuncten dieser Länge zwo Linien, wie AC, CE und AD, DE unter den gemessenen Winkeln gehörig angesetzt, und endlich, zwischen den Puncten, darin sich diese Linien durchschneiden, eine gerade Linie gezogen. Die Länge dieser Linie, nach dem verjüng-

jüngten Maaßstabe gemessen, giebt die gesuchte Höhe des Thurms im großen Maaße.

Anmerk. Auf eine ähnliche Weise kann die Tiefe eines Brunnens, eines Thals, u. dergl. gemessen werden. Uebrigens beruhet die Richtigkeit des hier gewiesenen Verfahrens gleichfalls und auf eine ähnliche Art, wie bey den vorhergehenden Messungsarten gezeigt ist, auf den Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

30. Wie können die geometrischen Körper eingetheilt werden?

1) In Ansehung ihrer **Figur**, oder der Beschaffenheit ihrer Oberflächen, in **eckigte**, welche von ebenen Flächen, und in **runde** Körper, welche von einer einzigen krummen Oberfläche begränzt sind.

Z. B. Der Raum, den ein Balken, Würfel, Haus u. dergl. einnehmen, der Raum, den die Wände eines Zimmers einschließen, u. s. w. ist ein eckigter; der Raum, den eine Kugel einnimmt, ist ein runder Körper.

Anmerk. 1) Die geometrischen Körper sind nemlich, wie ihre Gränzen und Linien, eigentlich blos Räume, und wenn, wie auch hier in der Folge geschehen wird, physikalische Körper und deren Gränzen genannt werden, so geschieht dies nur der Kürze des Ausdrucks wegen, und es sind allemal die Räume und deren Gränzen zu verstehn, welche sie einnehmen.

2) Die ebenen Flächen, welche die eckigten Körper begränzen, z. B. die Wände des Zimmers, heißen die Seiten oder Seitenflächen, die Linien, in welchen sich die Seiten durchschneiden, Seitenlinien, und die Puncte, in welchen mehrere Seiten des Körpers zusammentreffen, Ecken des Körpers. Dergleichen sind z. B. die Puncte, in welchen jede zwo Wände des Zimmers mit dem Boden, oder die beyden Seiten eines Dachs mit der Giebelmauer zusammentreffen.

3) Ebene Flächen, welche wie in den Ecken eines Körpers zusammentreffen, machen einen körperlichen Winkel. Z. B. In Fig. 70. machen die drey Ausschnitte von Kreisen PCDP, PCIP, DCID, welche in dem Puncte C zusammentreffen, einen körperlichen Winkel.

4) Die

4) Die Ecken eines Körpers sind gleich und ähnlich, wenn in ihnen gleich viele Seitenflächen zusammentreffen, und die Winkel der Seitenlinien gleich sind. Z. B. In einem viereckigten Zimmer kommen in jeder Ecke drey Seitenflächen zusammen, und die Seitenlinien machen rechte Winkel. Diese Ecken sind einander gleich und ähnlich. Dächer haben verschiedentlich andere Ecken, die den Ecken des Zimmers ungleich und unähnlich sind.

2) In Ansehung der **Größe** der **Seiten** und **Ecken** in **ordentliche** oder **reguläre**, und in **unordentliche** oder **irreguläre Körper.** Jene haben gleiche und ähnliche Seiten und Ecken, diese nicht.

Anmerk. Wenn die einzelnen Flächen, welche einen Körper einschließen, sämtlich in einer Ebene an einander gelegt werden, so nennt man diese ganze Zusammensetzung das Netz des Körpers. Dergleichen sind in Fig. 58 bis 69. Es ist für Anfänger vortheilhaft, dergleichen Netze zu zeichnen, und aus denselben, indem sie auf dünne Pappe geklebt, gehörig zusammengebogen und geleimt werden, die Körper zu bilden, welche in der Geometrie betrachtet werden.

31. Welches sind die vornehmsten geometrischen Körper?

1) Die **prismatischen Körper**, welche von zween ebenen gleichlaufenden Figuren, die einander gleich und ähnlich sind, und von so vielen Parallelogrammen, als diese Figuren Seiten haben, begränzt sind.

Anmerk. 1) Diese gleichlaufenden Figuren werden die Grundflächen, die Parallelogramme aber die Seitenflächen des Körpers genannt. Jedes dieser Parallelogramme hat mit zweyen andern, wie auch mit jeder Grundfläche eine gemeinschaftliche Seite. Z. B. Fig. 60. stellt das Netz eines prismatischen Körpers vor, dessen beyde Grundflächen Dreyecke sind. Wenn das Netz so gebogen wird, daß die beyden freyen Seiten der Dreyecke mit den nächsten Seiten der Parallelogramme, z. B. kn mit kx, rt mit rq, und eben so die ähnlich liegenden Linien auf der andern Seite zusammentreffen; so werden die Dreyecke einander gleichlaufend, und der Raum, den sie mit den Parallelogrammen einschließen, ist ein prismatischer Körper.

2) Wenn die Seitenflächen sämtlich auf den Grundflächen senkrecht stehn; so heißt der prismatische Körper gerade oder senkrecht, sonst schief. Die Seitenlinien der Seitenflächen, z. B. kr Fig. 60. stehn bey einem geraden prismatischen Körper auf den Grundflächen allemal senkrecht. Die Seitenflächen desselben sind demnach Rechtecke. Fig. 58. 59. 60. sind Netze senkrechter prismatischer Körper.

2) Die **pyramidalischen Körper**, welche von einer ebenen Figur, und so vielen Dreyecken als diese Figur Seiten hat, begränzt sind.

Anmerk. Diese ebene Figur heißt die Grundfläche, die Dreyecke aber die Seitenflächen des pyramidalischen Körpers. Jedes dieser Dreyecke hat mit zweyen andern und mit der Grundfläche eine gemeinschaftliche Seite, und alle Dreyecke treffen in einer Ecke zusammen, welche die Spitze des pyramidalischen Körpers genannt wird. Z. B. Fig. 62. ist das Netz eines pyramidalischen Körpers. Wenn dieses Netz so gebogen wird, daß ab mit bc, de mit dc zusammenfällt; so entsteht ein pyramidalischer Körper, dessen Grundfläche ein Dreyeck bdc ist, und dessen Spitze f ist, wo die Seitenflächen eine Ecke oder körperlichen Winkel machen.

3) Die **Kugel** oder **Sphäre**, welche von einer einzigen krummen Oberfläche begränzt wird, deren jede Puncte von einem Punct innerhalb des Körpers gleich weit entfernt sind.

Anmerk. Dieser Punct heißt der Mittelpunct; eine gerade Linie von ihm bis zu einem Punct in der Kugelfläche, d. i. der Oberfläche der Kugel, heißt ein Halbmesser, und eine gerade Linie von einem Punct der Kugelfläche bis zu einem andern, welche zugleich durch den Mittelpunct geht, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser der Kugel sind einander gleich, wie auch alle Durchmesser derselben, und diese bestehn aus zween Halbmessern.

32. Welches sind die vornehmsten prismatischen Körper?

1) Das **eckigte Prisma**, dessen Grundflächen geradlinigte Figuren sind, und zwar heißt dasselbe über-

überhaupt dreyeckigt, viereckigt oder vieleckigt, oder auch dreyseitig, vierseitig oder vielseitig, je nachdem die Grundflächen Dreyecke, Vierecke oder Vielecke sind. Insonderheit sind zu merken:

(1) Das **Parallelepipedum**, dessen Grundflächen Parallelogramme sind. Ein senkrechtes Parallelepipedum heißt **rechtwinklicht**, wenn seine Grundflächen zugleich Rechtecke sind.

Z. B. Ein jeder Balken an einem Hause, ein jedes viereckigtes Zimmer, dessen Boden ein Rechteck ist, ein viereckigter Pfeiler und dergl. sind rechtwinklichte Parallelepipeda. Fig. 73. ist ABCDE ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, und Fig. 59. ist das Netz eines dergleichen Parallelepipedi.

Anmerk. Ein jedes rechtwinklichtes Parallelepipedum wird demnach durch sechs Rechtecke, und jedes Parallelepipedum überhaupt durch sechs Parallelogramme begränzt, von welchen allemal zwey einander gegenüberstehen. Diese sind gleich und gleichlaufend, und jede zwey dergleichen Parallelogramme können für die Grundflächen des Körpers angenommen werden.

(2) Der **Würfel** oder **Cubus**, welcher ein rechtwinklichtes Parallelepipedum ist, dessen Seitenflächen und Grundflächen Quadrate sind Fig. 72.

Anmerk. Diese Quadrate sind sämtlich einander gleich, und es sind folglich auch alle Seitenlinien des Würfels gleich groß. Jede derselben wird daher schlechthin die Seite des Würfels genannt. Fig. 58. ist das Netz eines Würfels.

2) Der **Cylinder** (**Walze**, **Säule**), dessen Grundflächen Kreise von gleichen Halbmessern sind, und dessen Seitenfläche daher eine gekrümmte Oberfläche ist.

Anmerk. 1) Die Grundflächen des Cylinders sind ordentliche Vielecke von unendlich vielen Seiten; daher gehört der Cylinder zu den vieleckigten prismatischen Körpern, und seine Seitenfläche besteht aus einer Menge schmaler Parallelogramme, deren zwo gegenüberstehende Seiten mit den

Umkreisen der Grundflächen zusammentreffen und unendlich klein sind.

2) Die gerade Linie, welche die Mittelpuncte der Grundflächen des Cylinders vereinigt, heißt die Axe des Cylinders. Der Cylinder ist senkrecht oder gerade, wenn die Axe senkrecht, und schief, wenn die Axe schief auf den Grundflächen stehe.

3) Wenn durch einen Punct des Umkreises einer der beyden Grundflächen des Cylinders eine gerade Linie mit der Axe gleichlaufend gezogen wird, so fällt diese ganz in die Oberfläche des Cylinders. Bey einem geraden Cylinder ist diese dergleichen Linie auf der Grundfläche senkrecht. Fig. 61. ist das Netz eines geraden Cylinders. Die Seitenfläche desselben ist ein Rechteck, welches um den Umkreis der Grundflächen gebogen wird; die Grundlinien desselben, g h, e f müssen daher den Umkreisen der Grundflächen a b, c d gleich seyn.

4) Folgende Begriffe und Eigenschaften der prismatischen Körper werden bey der Berechnung ihres Inhalts vorausgesetzt.

(1) Jede senkrechte Linie zwischen zween Ebenen, in welchen die Grundflächen eines prismatischen Körpers liegen, heißt die Höhe desselben. Bey geraden Prismen, wie Fig. 59. 60. sind die Seitenlinien, wie i l, k r, bey dem geraden Cylinder aber die Axe, oder jede mit derselben gleichlaufende Linie in der Seitenfläche, wie e g Fig. 61., bey den Würfeln jede Seite derselben ihrer Höhe gleich.

(2) Prismatische Körper sind einander gleich, oder sie haben gleichgroßen körperlichen Inhalt, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind. Z. B. Wenn in Fig. 59. und 61. die Grundflächen l m und c d und die Höhen i l und e g gleich sind, so sind beyde Körper, deren Netze diese Figuren sind, einander gleich.

(3) Zu jedem prismatischen Körper kann demnach ein gerades Prisma angenommen werden, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe, und daher auch gleich großen körperlichen Inhalt hat. Da ferner zu jeder ebenen Figur sowol ein ihr gleiches gleichschenklichtes Dreyeck, als ein ihr gleiches Rechteck angenommen werden kann, so kann auch zu einem jeden prismatischen Körper sowol ein gerades Prisma, dessen Grundflächen gleichschenklichte Dreyecke sind, als auch ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angenommen werden, welche gleiche Grundflächen und Höhen, folglich auch einerley körperlichen Inhalt mit demselben haben.

(4) Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Höhe zwey- dreymal ꝛc. größer oder kleiner ist, als die Höhe eines andern, ist eben so vielmal größer oder kleiner, als dieses andere, wenn es gleiche Grundflächen mit ihm hat. Das größere besteht nemlich aus zwey-, drey ꝛc. übereinander stehen-

stehenden Parallelepipedis, deren jedes mit dem kleinern gleiche Grundfläche und Höhe hat, und ihm folglich gleich ist. Eben so ist auch ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Grundfläche zwey- dreymal ꝛc. größer oder kleiner ist, als die Grundfläche eines andern, eben so vielmal größer oder kleiner, als dieses andere, wenn es mit ihm eine Höhe hat. Das größere ist nemlich einem rechtwinklichten Parallelepipedo gleich, welches aus zwey drey ꝛc. kleinern neben einander stehenden Parallelepipedis besteht, deren jedes mit dem kleinern gleiche Grundfläche und Höhe hat, und ihm folglich gleich ist. Da von prismatischen Körpern, wenn nur von ihrer Größe und Verhältniß zu einander die Rede ist, eben dasselbe gilt, was von der Größe und Verhältniß der ihnen gleichen rechtwinklichten Parallelepipedorum erweislich ist, so gelten auch von allen prismatischen Körpern überhaupt die hier angeführten Sätze. Allgemein werden sie folgendergestalt ausgedruckt: Prismatische Körper verhalten sich wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen; und wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben.

(5) Wenn die Grundfläche eines rechtwinklichten Parallelepipedi so vielmal größer oder kleiner, als die Grundfläche eines andern ist, so vielmal kleiner oder größer seine Höhe als die Höhe dieses andern ist; z. B. wenn die Grundfläche des erstern halb so groß, seine Höhe aber zweymal so groß, als die Grundfläche und Höhe des andern ist; so sind beyde Körper einander gleich. Auch dieser Satz gilt überhaupt von allen prismatischen Körpern, und er wird allgemein so ausgedruckt: Prismatische Körper sind einander gleich, wenn die Verhältniß ihrer Grundflächen der umgekehrten Verhältniß ihrer Höhen gleich ist.

§3. Welches sind die vornehmsten pyramidalischen Körper?

1) Die **eckigte Pyramide**, deren Grundfläche eine geradlinigte Figur ist, und zwar heißt dieselbe überhaupt **dreyeckigt**, **viereckigt** oder **vieleckigt**, oder auch **dreyseitig**, **vierseitig** oder **vielseitig**, je nachdem die Grundflächen Dreyecke, Vierecke oder Vielecke sind.

Anmerk. Eine dreyseitige Pyramide ist überhaupt von vier Dreyecken begränzt. Jede derselben kann zur Grundfläche der Pyramide angenommen werden.

2) **Der Kegel (Conus)**, dessen Grundfläche ein Kreis, und dessen Seitenfläche daher eine gekrümmte Oberfläche ist.

Anmerk. 1) Die gewöhnliche Figur des Zuckerhuts ist die Figur eines Kegels. Wegen seiner Grundfläche gehört der Kegel zu den vieleckigten Pyramiden, und seine Seitenfläche besteht aus einer Menge schmaler Dreyecke, deren Grundlinien mit dem Umkreise der Grundfläche zusammenfallen, und unendlich klein sind.

2) Die gerade Linie von der Spitze des Kegels bis zum Mittelpunct der Grundfläche heißt die Axe des Kegels. Der Kegel ist senkrecht oder gerade, wenn die Axe senkrecht, und schief, wenn die Axe schief auf der Grundfläche steht.

3) Gerade Linien, welche von der Spitze des Kegels nach Puncten des Umkreises der Grundfläche gezogen werden können, fallen ganz in die Seitenfläche des Kegels. Beym geraden Kegel sind diese Linien gleich, und jede derselben heißt die Seite des Kegels. Fig. 58. ist das Netz eines geraden Kegels. Das Netz der Oberfläche eines solchen Kegels ist ein Ausschnitt eines Kreises, dessen Halbmesser der Seite, und dessen Bogen dem Umkreise der Grundfläche des Kegels gleich ist.

4) Wenn von dem Ausschnitt c d e Fig. 68. der kleinere c f g, dessen Bogen f g mit d e concentrisch ist, weggenommen, hierauf das Netz gehörig zusammengebogen wird, so daß der Bogen d n e, an den Umkreis der Grundfläche a b, folglich f d a n g e, und der Punct f an dem Punct g anschließt, so entsteht ein abgekürzter Kegel. Der Bogen f g wird dadurch in einen Kreis gebogen, welcher der Grundfläche gleichlaufend ist. Die obere Oefnung des abgekürzten Kegels kann daher mit einem Kreise geschlossen werden, dessen Umkreis dem Bogen f g gleich ist.

5) Wenn überhaupt ein Kegel durch irgend einen Punct seiner Seitenfläche von einer Ebene so geschnitten wird, daß der Schnitt der Grundfläche gleichlaufend ist, so ist der dadurch entstehende Durchschnitt ein Kreis. Der Kegel selbst aber wird dadurch in zween Theile getheilt, deren einer gleichfalls ein Kegel, der andere aber ein abgekürzter Kegel ist. Wenn die schneidende Ebene der Grundfläche nicht gleichlaufend ist, und auch nicht durch die Spitze des Kegels geht; so entstehen drey verschiedene Arten von Durchschnitten in dem Kegel, welche von andern krummen Linien begränzt, und überhaupt Kegelschnitte genannt werden. Sie heißen Parabel, Ellipse und Hyperbel, und es wird in der Analysis von denselben gehandelt.

Folgende Begriffe und Eigenschaften der pyramidalischen Körper werden bey der Berechnung ihres Inhalts vorausgesetzt.

(1) Wenn durch die Spitze eines pyramidalischen Körpers eine Ebene, der Ebene der Grundfläche gleichlaufend, geht oder angenommen wird; so heißt jede zwischen diesen gleichlaufenden Ebenen gegen beyde senkrechte gerade Linien die Höhe des Körpers. Bey einer dreyseitigen Pyramide kann die Höhe verschiedentlich bestimmt werden, je nachdem die eine oder die andere ihrer Seiten zur Grundfläche angenommen wird. Wenn die senkrechte Linie durch die Spitze der Pyramide selbst geht, so kann die gleichlaufende Ebene durch die Spitze fehlen. Zuweilen trift alsdenn die senkrechte Linie außerhalb der Grundfläche, welche man in diesem Fall gehörig erweitern, oder sich erweitert vorstellen muß.

(2) Pyramidalische Körper sind einander gleich, oder sie haben gleichgroßen körperlichen Inhalt, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

3) Ein jedes dreyseitiges Prisma kann in drey dreyseitige Pyramiden zertheilt werden, deren wenigstens jede zwo gleiche Grundflächen und eine gemeinschaftliche Höhe haben, und welche demnach sämtlich einander gleich sind. Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet ohne Schwierigkeit ein, wenn man ein dreyseitiges Prisma von Holz zur Hand hat. Das hier folgende kann auch nur unter dieser Bedingung leicht verständlich seyn. Es ist bequemer, und auch zur Vollkommenheit des Beweises hinlänglich, ein gerades Prisma dazu zu wählen, welches gleichschenklichte Dreyecke zu Grundflächen habe. Die 6ste Figur stelle das Netz eines solchen Prisma vor. Die in dem Netz gezogenen Diagonalen müssen nach eben der Richtung auf den Seitenflächen des hölzernen Prisma gezogen, auch auf demselben die Buchstaben des Netzes gehörig an ihren Ort geschrieben seyn. (1) Wenn nun das Prisma zwörderst so geschnitten wird, daß der Schnitt zugleich durch die Diagonalen xu, xr geht, indem beyde mit x bezeichnete Puncte bey dem Körper des Prisma selbst, wie überhaupt die Linien xq zusammenfallen; so entsteht eine erste dreyseitige Pyramide. Geht hierauf der Schnitt zugleich durch vr, xr; so entsteht eine zwote und dritte Pyramide, deren jede gleichfalls dreyseitig ist. Die zwote sey die, deren eine Seite xvu ist, so ist folglich die driete die, deren eine Seite kvr ist. (2) Wenn man die erste und zwote von der dritten absondert, und hierauf jene auf xqu, diese auf xvu, als auf Grundflächen, so neben einander stellt, daß beyde Grundflächen das Rechteck xquv bilden, so findet man leicht, daß ihre Grundflächen gleich sind, daß ferner in dem Punct r ihre Spitzen zusammenfallen, und daß folglich eine senkrechte Linie aus r auf ru oder qu, welche beyde Linien nämlich

bey dem Körper selbst eine einzige ausmachen, beyder Pyramiden gemeinschaftliche Höhe sey. Die Höhe der zwoten Pyramide fällt nemlich in die Erweiterung xqu ihrer Grundfläche. (3) Wenn man nunmehr die zwote und dritte Pyramide vereinigt, und jene, von der ersten abgesondert, auf rvu, diese auf vkr, als auf Grundflächen, so neben einander stellt, daß beyde Grundflächen das Rechteck vkru bilden, so findet man auch hier, daß ihre Grundflächen gleich sind, daß ferner in dem Punct n ihre Spitzen zusammenfallen, und daß folglich eine senkrechte Linie aus n auf vk beyder Pyramiden gemeinschaftliche Höhe sey. Demnach ist auch die zwote Pyramide der dritten gleich. (4) Hieraus folgt sodann die Gleichheit der ersten und dritten Pyramide. Wenn indessen die Grundflächen des Prisma gleichschenklichte Dreyecke, und hier kn, rt die Grundlinien derselben sind, so ist auch erweislich, daß alle drey Pyramiden gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Noch ist hiebey anzumerken, daß bey der ersten Pyramide auch die eine Grundfläche des Prisma kur, und bey der dritten die andere vkn zur Grundfläche angenommen werden könne; in diesem Fall sind die Seitenlinien des Prisma xq, kr, welche der Höhe desselben gleich sind, auch beyder Pyramiden Höhen. Jede dieser beyden Pyramiden hat demnach mit dem Prisma eine gemeinschaftliche Grundfläche und Höhe.

(4) Hieraus wird überhaupt geschlossen, daß der körperliche Inhalt eines jeden pyramidalischen Körpers dem dritten Theil des körperlichen Inhalts eines prismatischen Körpers gleich sey, der mit jenem gleichgroße Grundfläche und Höhe hat. Die Schlüsse sind kürzlich folgende. Man stelle sich zu dem prismatischen Körper, mit welchem ein pyramidalischer verglichen werden soll, ein dreyseitiges gerades Prisma vor, welches mit ihm gleichgroße Grundfläche und Höhe hat, und dessen Grundflächen gleichschenklichte Dreyecke sind. Dieses Prisma sey in seine drey gleichen Pyramiden getheilt. Der gegebene pyramidalische Körper heiße P, der gegebene prismatische P, das angenommene gerade Prisma heiße Π, und die eine der gleichen Pyramiden, in welche dasselbe getheilt ist, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, heiße π, so haben nach diesen Voraussetzungen P, Π, p, π sämtlich gleichgroße Grundflächen und Höhen, folglich ist 1) $P = \Pi$; und $p = \pi$ d. i. der gegebene prismatische Körper hat mit dem angenommenen Prisma, und der gegebene pyramidalische Körper hat mit der Pyramide des angenommenen Prisma gleichgroßen körperlichen Inhalt. 2) Da nun $\pi = \frac{1}{3}\Pi$ ist, so ist auch das ihm gleiche $p = \frac{1}{3}\Pi$; und da $\Pi = P$ ist, so muß auch, was dem dritten Theil des körperlichen Inhalts von Π gleich ist, dem dritten Theil des körperlichen Inhalts von P gleich

P gleich seyn, d. i. es muß $p = \frac{1}{3} P$ seyn. Wenn man aus Netzen Körper, die so, wie P, p II, hier angenommen worden, beschaffen sind, zusammensetzt, so ist es auch dem ersten Anfänger leicht, diese Schlüsse zu übersehen.

(5) Demnach ist auch der Inhalt eines jeden pyramidalischen Körpers dem dritten Theil des Inhalts eines rechtwinklichten Parallelepipedi gleich, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, welches mit diesem gleiche Höhe, aber eine dreymal kleinere Grundfläche, oder gleiche Grundfläche, aber eine dreymal kleinere Höhe hat, ist der dritte Theil desselben, folglich dem pyramidalischen Körper gleich, und es kann demnach zu einem jeden pyramidalischen Körper ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angenommen werden, welches ihm gleich ist.

54. Welches sind die vornehmsten Eigenschaften der Kugel?

1) Wenn die Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis.

So kann z. B. Fig. 70. eine durch Ebenen verschiedentlich geschnittene Kugel vorstellen. Die Schnitte sind sämelich Kreise. Durch den Umfang aller Kreise der Figur geht die Kugelfläche.

Anmerk. 1) Wenn ein Halbkreis, wie PTQ Fig. 70. in seinem Durchmesser PQ fest ist, und um denselben herumgeführt wird: so kommt er nach und nach in Lagen, wie PIQ, PDQ, PAQ u. s. w. und sein Umkreis beschreibt, wenn er so weit herumgedreht wird, bis er wieder in seine, vorige Lage kommt, eine vollständige Kugelfläche, welche mit dem Halbkreise einen gemeinschaftlichen Mittelpunct, und gleiche Halbmesser und Durchmesser hat. Gerade Linien, wie cL, CT, welche in diesem Halbkreise gegen PQ senkrecht sind, beschreiben bey dieser Herumdrehung desselben Kreise, deren Umfang LiM, TBA in der Kugelfläche liege, und deren Halbmesser cL, CT sind. Ein jeder anderer Halbkreis, wie z. B. pLq, welcher mit dem vorigen einerley Mittelpunct und einen gleichgroßen Halbmesser hat, beschreibt, indem er um seinen Durchmesser pq gedrehet wird, eben dieselbe Kugel. Kugeln von gleichen Halbmessern können nemlich nicht ungleich seyn. Wenn in pLq gegen pq gleichfalls senkrechte Linien, wie CL, gezogen werden, so entstehn gleichfalls Kreise, und überhaupt kann

hieraus

hieraus leicht begreiflich gemacht werden, wie durch jeden Schnitt der Kugel durch eine Ebene ein Kreis entstehe.

2) Diese Kreise sind desto kleiner, je weiter sie vom Mittelpunct entfernt sind, und desto größer, je näher sie demselben sind. Kreise, die durch den Mittelpunct der Kugel gehen, sind die größten; ihr Halbmesser ist dem Halbmesser der Kugel, und sie selbst sind demnach sämmtlich einander gleich. Z. B. Fig. 70. sind PAQT, PDQ, PIQ, EBL größte Kreise der Kugel; MiL aber und EaN sind kleiner.

3) Eine senkrechte Linie Cc vom Mittelpunct der Kugel auf einen Kreis derselben geht durch den Mittelpunct dieses Kreises, und wenn mehrere Kreise mit einander gleichlaufend sind, in welchem Fall sie Parallelkreise genannt werden, wie MiL, ABT, EaN, so geht diese senkrechte Linie durch ihrer aller Mittelpuncte, und verlängert trift sie die Kugelfläche in zween Puncten P und Q, welche die Pole dieser Kreise genannt werden. Die Pole eines größten Kreises sind demnach diejenigen Puncte der Kugelfläche, in welchen ein auf diesem Kreise senkrechter Durchmesser der Kugel dieselbe trift. Z. B. Wenn PQ auf ABT, pq auf EBL; BC auf APTQ senkrecht sind, so sind P und Q Pole des größten Kreises ABT; p und q Pole des größten Kreises EBL; und B einer der Pole des größten Kreises APTQ.

4) Die Pole eines Kreises sind von allen Puncten des Umfangs desselben gleich weit entfernt. Z. B. die geraden Linien PL, Pb, Pi, Pd, PM sind sämmtlich einander gleich. Wenn man daher die eine Spitze des Cirkelinstruments in dem Pol P eines auf der Kugelfläche durch einen gegebenen Punct M zu verzeichnenden Kreises befestigt, und den andern Schenkel bis M eröfnet, so kann mit dem Cirkel der Kreis MIL von seinem Pol aus auf der Kugelfläche auf eben die Art, wie ein jeder Kreis aus seinem Mittelpunct auf einer Ebene, verzeichnet werden.

5) Jede drey Bogen größter Kreise, welche sich auf der Kugelfläche, so wie drey gerade Linien in einer Ebene, indem sie ein Dreyeck bilden, durchschneiden, machen ein sphärisches Dreyeck, z. B. AEBA, PDIP sind sphärische Dreyecke.

2) Der körperliche Inhalt einer Kugel beträgt zwey Drittel des körperlichen Inhalts eines Cylinders, dessen Höhe und Durchmesser der Grundfläche dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

Anmerk.

Anmerk. 1) Ein Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe mit diesem Cylinder beträgt ein Drittel desselben; demnach verhalten sich Kegel, Kugel und Cylinder von der hier angezeigten Beschaffenheit wie 1 2 3, und der körperliche Inhalt eines Kegels, dessen Höhe und Durchmesser der Grundfläche dem Durchmesser der Kugel gleich ist, ist halb so groß, als der körperliche Inhalt der Kugel.

2) Da zu einem jeden Cylinder ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, und ihm gleich ist, und wiederum zu einem jedem rechtwinklichten Parallelepipedum ein anderes angenommen werden kann, dessen körperlicher Inhalt zwey Drittel desselben beträgt, so kann auch zu einer jeden Kugel, deren Durchmesser bekannt ist, ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angenommen werden; dessen körperlicher Inhalt dem körperlichen Inhalt der Kugel gleich ist.

3) Die Oberfläche einer Kugel ist viermal größer, als ein größter Kreis derselben.

Anmerk. 1) Ein Kreis, dessen Durchmesser zweymal so groß als der Durchmesser einer Kugel, oder eines größten Kreises derselben ist, ist gleichfalls viermal größer als ein größter Kreis derselben. Demnach kann zu jeder Kugelfläche ein Kreis gefunden werden, der mit ihr einerley Inhalt hat.

2) Das Netz einer Kugel Fig. 69. wird folgendergestalt verfertigt. Auf einer geraden Linie AB, welche in 30 gleiche Theile getheilt worden, werden mit gleichen Halbmessern, deren jeder zehn dieser Theile enthält, nach und nach aus dem Anfangspunct A und den Theilungspuncten 1, 2, 3 u. s. w. bis 11 Bogen wie cde, fgh, u. s. w. und aus den Theilungspuncten 19, 20, 21, 22 u. s. w. bis 11 Bogen wie cie, fdh, u. s. w. gezogen, welche die vorigen durchschneiden. Die ganze Fläche, welche die also gezeichneten Bogen einschließen, ist das Netz einer Kugel. Wenn der Durchmesser der Kugel, deren Netz verzeichnet werden soll, gegeben ist, so muß zuvörderst der Umfang des größten Kreises der Kugel, und hierauf eine ihm gleiche gerade Linie gefunden werden. Diese gerade Linie wird in 12 gleiche Theile getheilt, und die zur Zeichnung des Netzes erforderliche gerade Linie AB erhält 30 solcher Theile. Mit derselben wird alsdenn, wie vorhin gezeigt ist, verfahren.

35. Wie wird der Inhalt der geometrischen Körper gemessen?

1) Ueberhaupt wird ein Körper von bestimmter Größe, welcher wieder in kleinere gleiche Körper eingetheilt wird, zum Maaßstabe angenommen, und alsdenn gefunden, wie vielmal dieser Körper oder seine Theile in dem Körper, dessen Inhalt gemessen werden soll, enthalten sey.

Anmerk. 1) Zu einem solchen Maaßstabe ist ein **Würfel**, und zwar, um die Ausmessung der Körper der im vorhergehenden angezeigten Ausmessung der Flächen und Linien gleichförmig zu machen, ein Würfel, dessen Seite eine Ruthe lang ist, und dessen Seitenflächen folglich Quadratruthen sind angenommen worden. Ein solcher Würfel wird daher eine **Cubikruthe** genannt, und es wird dieselbe wieder in Cubikfuß, d. i. in Würfel, deren jede Seite einen Fuß lang ist, diese wieder in Cubikzolle, d. i. in Würfel, deren jede Seite einen Zoll lang ist, diese endlich in Cubiklinien, d. i. in Würfel, deren jede Seite eine Linie lang ist, eingetheilt. Die 72ste Figur stellt ein solches körperliches Maaß vor. Wenn die Seiten AB, BD ꝛc. eine Ruthe bedeuten, so ist der Körper ABEC eine Cubikruthe. Jede Seite, wie AB, AC ist nach geometrischem Maaß in 10 gleiche Theile, welche Fuß bedeuten, und jede Seitenfläche, wie BC, CE ist in ihre 100 Quadratfuß getheilt. Wenn der ganze Würfel zuvörderst durch alle 10 mit AB, BD durch die Endpuncte der Fuße gleichlaufend gezogene gerade Linien geschnitten wird, so wird er dadurch in 10 über einander liegende Parallelepipeda getheilt, deren jedes eine Quadratruthe zur Grundfläche hat, und einen Fuß hoch ist, und welche daher sämtlich einander gleich sind. Wenn ferner jedes dieser Zehntel des Würfels nach Linien, so wie sie in der Oberfläche CE gezogen sind, und welche 100 Quadratfuß begränzen, nach der Länge und Breite geschnitten wird, so wird dasselbe dadurch in 100 Körper, deren Grundfläche 1 Quadratfuß und deren Höhe 1 Fuß ist, d. i. in 100 Cubikfuß getheilt. Demnach enthält eine Cubikruthe zehnmal so viel, d. i. tausend Cubikfuß. Wenn jeder Cubikfuß auf eine ähnliche Art, wie die Cubikruthe getheilt wird, oder, wenn man sich nunmehr vorstellt, daß AB einen in zehn Zoll getheilten Fuß, folglich der Würfel ABEC einen Cubikfuß bedeute; so erhellt, wie vorhin, daß ein Cubikfuß 1000, folglich eine Cubikruthe 1000000 Cubikzolle enthält. Diese Theilung kann

kann auch auf Cubiklinien fortgesetzt, und das hier gesagte leicht darauf angewandt werden.

2) Eine Cubikruthe enthält nach Rheinländischem Maaß 12mal 144, d. i. 1728 Cubikfuß; jeder Cubikfuß enthält 1728, folglich die Cubikruthe 1728^3 Cubikzolle, u. s. w. Bey größern Körpern, z. B. bey den großen Weltkörpern, wird gewöhnlich eine Cubikmeile, d. i. ein Würfel, dessen Seite eine Meile beträgt, zum Maaß angenommen.

3) Unmittelbare Messungen mit dem Cubikmaaß sind in den mehresten Fällen unmöglich. Die folgenden Vorschriften lehren den Inhalt der Körper in Cubikmaaß bloß aus dem Längenmaaß durch Rechnung finden.

2) **Insonderheit** kann der Inhalt der bisher betrachteten Körper folgendergestalt berechnet werden.

a) Wenn der gegebene Körper ein **rechtwinkliches Parallelepipedum** ist, wie ABDE Fig. 73.; so werden zuvörderst Grundlinie und Höhe AB, BC der Grundfläche ABC, wie auch die Höhe AE des Körpers, mit einerley, z. B. geometrischem Maaß gemessen. Hieraus wird alsdenn die Grundfläche des Körpers berechnet, und die Zahl, welche deren Inhalt ausdruckt, mit der Zahl der Höhe AE des Körpers, welche sich jedoch mit den Zahlen der Seiten AB, BC auf **einerley Theile** des Maaßes beziehn muß, multiplicirt. Das Product ist der gesuchte Inhalt des gegebenen Parallelepipedi in demjenigen Cubikmaaß, welches von den Theilen des Längenmaaßes seine Benennung hat, auf welche sich die Factoren beziehn.

Z. B. Es sey AB = 4′, BC = 10′, AE = 5′, so ist der Inhalt der Grundfläche 40 Quadratfuß, und der Inhalt des ganzen Körpers 40 × 5, d. i. 200 Cubikfuß.

Anmerk. Die 73ste Figur stellt zugleich vor, wie diese Rechnung zu verstehn sey. Aus den Berechnungen des Inhalts der Flächen ist bekannt, wie aus der Länge der Seiten AB = 4′ und BC = 10′ geschlossen werde, daß die Grundfläche 40 Quadratfuß enthalte. Hieraus wird bey

bey der gegenwärtigen Rechnung weiter geschlossen, daß, da die Grundfläche eines jeden Cubikfußes ein Quadratfuß ist, auf der Grundfläche ABC 40 Cubikfuß an und neben einander gestellt werden können. Wenn nun AE = 5′ gefunden wird, so wird daraus ferner geschlossen, daß fünf Schichten einer solchen Menge Cubikfuße, dergleichen auf der Grundfläche 40 stehen können, in dem ganzen Raum des Körpers über einander liegen können, und denselben ganz füllen würden, woraus folgt, daß der Körper einen Raum einnehme, der so groß ist, als der Raum, den fünfmal 40, oder 200 Cubikfuß füllen, d. i. daß sein körperlicher Inhalt 200 Cubikfuß betrage. Eigentlich entsteht also hier die Zahl 200, indem 40 Cubikfuß mit der unbenannten Zahl 5 multiplicirt werden.

Beyspiel. Es sey die Länge eines Hauses, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, 65′ in geometrischem Maaße, die Breite desselben 25′, seine Höhe bis an das Dach 3° 8′, so ist die Berechnung seines Inhalts, so wie sie nach dem vorhergehenden verständlich aufzusetzen ist, folgende:

I. 65′ Q. M. in einer Reihe an der Grundlinie der Grundfläche.	II. 1625 Cub. F. auf der Grundfl. 38 Schichten.
25 Reihen.	
325	13000
130	4875
1625′ Grundfläche.	61750 Cubikfuß.

Demnach ist der Inhalt des Raums, welchen die Mauern des Hauses bis ans Dach einschließen, 61750 Cubikfuß, oder 61 Cubikruthen 750 Cubikfuß, welches kürzer folgendergestalt geschrieben wird: $61^{\circ\circ}, 750^{\circ}$.

b) Wenn die gegebene Fläche **kein rechtwinklichtes Parallelepipedum** ist; so ist zuvörderst **überhaupt** zu bemerken, daß, da zu einem jeden der im Vorhergehenden betrachteten Körper ein rechtwinklichtes Parallelepipedum angenommen werden kann, welches ihm gleich, oder auch dessen Hälfte, Drittel u. s. w. er ist, anstatt des gegebenen Körpers dieses rechtwinklichte Parallelepipedum berechnet werden könne. Hieraus können alle folgende Vorschriften hergeleitet werden.

Anmerk. Bey diesen Berechnungen ist mit den nöthigen Veränderungen und Erweiterungen das Wesentliche von dem-

demjenigen zu bemerken, was im Vorhergehenden bey Berechnung derjenigen Flächen, welche keine rechtwinklichte Parallelogramme sind, im voraus über die Ausdrücke Multiplication, Division der Linien ꝛc. angemerkt worden ist.

1) **Wenn der gegebene Körper ein prismatischer Körper ist, so wird zuvörderst der Inhalt seiner Grundfläche nach den im Vorhergehenden gegebenen Vorschriften berechnet, und dieser hierauf mit der Höhe des Körpers multiplicirt. Das Product ist der gesuchte Inhalt.**

Anmerk. 1) Auf diese Art kann der körperliche Inhalt einer Mauer eines in einem prismatischen Raum aufgestellten Holzhaufens, oder aufgeschütteten Kornhaufens und dergl. auch bey der erstern, wie viele Steine, bey dem andern, wie viel Holz, bey dem letztern, wie viel Scheffel darin befindlich sind, gefunden werden, wenn die Größe eines Steins, eines Stück Holzes und eines Scheffels im Cubikmaaß bekannt ist. Ein Scheffel Korn enthält in Berlin 2614, in Breslau 3731, in Danzig 2437, in Dresden 5287, in Hamburg 5312, in Holstein 1992, in Leipzig 6939, in Magdeburg 2612, im Mecklenburgischen 2140 Pariser Cubikzolle. Eine Klafter Holz hält 216 Pariser Cubikfuß. Die Verhältniß der Quadrat- oder Cubikfuße in andern, z. B. Pariser Maaßen zum geometrischen oder Rheinländischen ist der Verhältniß der Quadrate oder der Würfel derjenigen Zahlen gleich, welche die Verhältniß dieser Fuße in Längenmaaß ausdrücken. Da z. B.

1 Pariser Fuß : 1 Rhl. Fuß = 1440 0 : 1391 3
so ist 1 Pariser Quadr. F. : 1 Rhl. Q. F. = 1440^2 : 1391^2
und 1 Pariser Cub. F. : 1 Rhl. C. F. = 1440^3 : 1391^3

2) Der körperliche Inhalt eines Fasses wird also gefunden: Es wird der größte Durchmesser des Fasses, oder seine Weite in der Mitten, durch das Spundloch, gemessen, und die Länge desselben verdoppelt; hierauf wird der kleinste Durchmesser, oder die Weite des Fasses am Boden gemessen, und diese Größe zu dem doppelten größten Durchmesser addirt. Der dritte Theil dieser Summe ist der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe der Länge des Fasses, und dessen körperlicher Inhalt demjenigen des Fasses gleich ist. Folglich darf man nur zu diesem Durchmesser den Kreis finden, und mit der Länge des Fasses multipliciren. Wenn man nun den körperlichen Inhalt einer Kanne in eben demselben Maaße sucht, und dadurch den Inhalt des Fas-

ses dividirt, so findet man dadurch, wie viel Kannen das Faß enthält.

3) Durch die der Multiplication entgegengesetzte Rechnung, d. i. durch die Division, wird zu der gegebenen Grundfläche eines prismatischen Körpers dessen Höhe, oder zu der gegebenen Höhe desselben seine Grundfläche gefunden, wenn in beyden Fällen zugleich sein körperlicher Inhalt gegeben ist.

4) Die Zahl, welche den körperlichen Inhalt eines Würfels anzeigt, ist die Cubikzahl derjenigen Zahl, welche seine Seite ausdruckt. Die Seite eines Würfels wird demnach, wenn dessen Inhalt gegeben ist, gefunden, indem aus diesem die Cubikwurzel gezogen wird.

2) Wenn der gegebene Körper ein **pyramidalischer Körper** ist, so wird zuvörderst gleichfalls der Inhalt seiner Grundfläche gefunden, hierauf derselbe mit der Höhe multiplicirt, und das Product mit 3 dividirt. Der Quotient ist der gesuchte Inhalt.

Anmerk. 1) Es kann auch sogleich der dritte Theil der Grundfläche mit der Höhe, oder der dritte Theil der Höhe mit der Grundfläche multiplicirt werden. In beyden Fällen ist das Product dem gesuchten Inhalt des pyramidalischen Körpers gleich.

2) Wenn der Inhalt eines pyramidalischen Körpers, nebst seiner Grundfläche gegeben ist, und jener durch diese dividirt wird, so ist der Quotient dem dritten Theil der Höhe des Körpers gleich, u. s. w. woraus erhellt, wie durch die Umkehrung der Rechnung die Höhe eines pyramidalischen Körpers, wenn seine Grundfläche, oder die Grundfläche desselben, wenn seine Höhe, und in beyden Fällen sein körperlicher Inhalt bekannt ist, gefunden werde.

3) Der körperliche Inhalt einer **Kugel** wird, wenn der Durchmesser derselben gegeben ist, gefunden, indem zuvörderst der Inhalt des größten Kreises derselben berechnet, und dieser hierauf mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers multiplicirt wird. Das Product ist der gesuchte Inhalt.

Anmerk. 1) Weil der Inhalt des größten Kreises der Kugel gefunden wird, wenn man den Umkreis desselben mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers multiplicirt: so muß, um den körperli-

che

chen Inhalt einer Kugel zu finden, nach der hier gegebenen Regel der Umkreis zuvörderst mit dem vierten Theil des Durchmessers, und hierauf wiederum mit $\frac{2}{3}$ desselben multiplicirt werden. Um daher während der Rechnung die hiedurch zuweilen entstehenden Brüche zu vermeiden, kann beydemal mit dem ganzen Durchmesser multiplicirt werden; das Product wird sodann noch mit $\frac{1}{4}$ und hierauf mit $\frac{2}{3}$, oder sogleich mit dem Product aus $\frac{1}{4}$ in $\frac{2}{3}$, d. i. mit $\frac{2}{12}$, oder $\frac{1}{6}$ multiplicirt, oder, welches einerley ist, mit 6 dividirt. Der Quotient giebt den gesuchten Inhalt. Z. B. Wenn die Erde für eine vollkommene Kugel angenommen wird; so beträgt ihr Durchmesser 1719 geographische oder deutsche Meilen. Demnach ist die Berechnung ihres körperlichen Inhalts folgende:

I. 113 : 355 = 1719 : Umkreis

355

8595
8595
5157

113) 610245 | 5400 Meilen, Umfang des größten Kreises der Erdkugel.
565

452
452

45

II. 1719
5400

687600
8595

9282600 Qdr. Meil.

III. 9282600
1719

83543400
92826
649782
92826

15956789400

6)

2659464900 Cubikmeilen, körperlicher Inhalt der Erde.

Hier ist zuvörderst (I.) aus dem Durchmesser der Umkreis, 5400 Meilen gefunden worden. Dieser ist sodann (II.) nicht mit dem vierten Theil des Durchmessers, sondern, um Brüche zu vermeiden, mit dem ganzen Durchmesser multiplicirt worden. Das Product 9282600 bedeutet Quadratmeilen, und ist demnach viermal größer, als der Inhalt des größten Kreises der Kugel. Dieses Product ist endlich (III.) wiederum nicht mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers, sondern mit dem ganzen Durchmesser multiplicirt, hierauf aber das Product mit 6 dividirt worden, weil $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$ ist.

2) Da die Kugelfläche viermal gröſser, als ein gröſster Kreis der Kugel ist, so ist durch die zwote Multiplication (11) in dem vorhergehenden Beyspiel zugleich der Inhalt der ganzen Kugelfläche, d. i. der Oberfläche der Erde gefunden worden. Die Regel, den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden, kann daher auch folgendergestalt angegeben werden: Es wird die Oberfläche der Kugel mit ihrem Durchmesser multiplicirt, und das Product mit 6 dividirt.

3) Wenn die im vorhergehenden Beyspiel gemachte Berechnung durch die arithmetischen Zeichen blos angezeigt wird, so entsteht folgender Ausdruck:

$$\frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{3} \times 1719 \times 1719 \times 1719 \times \frac{1}{6}$$

oder, wenn $\frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{3}$ mit $\frac{1}{6}$ multiplicirt wird,

$$\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \times 1719^3$$

Einer andern Kugel, z. B. des Mondes, dessen Durchmesser ohngefehr 468 geographische Meilen ist, körperlicher Inhalt, würde durch folgendes Product vorgestellt werden:

$$\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \times 468^3$$

Die Verhältniß beyder Kugeln ist also:

$$\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \times 1719^3 : \frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \times 468^3$$

oder kürzer $1719^3 : 468^3$.

d. i. Die Verhältniß beyder Kugeln ist der Verhältniß der Würfel ihrer Durchmesser gleich. Da dies von jeden zwo Kugeln auf eben diese Art bewiesen werden kann, so folgt überhaupt, daß jede zwo Kugeln sich wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten.

4) Vermöge dieses Satzes kann die Regel, den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden, noch auf eine andere Art verändert vorgetragen werden. Wenn nemlich Durchmesser und Inhalt einer Kugel bekannt sind, so wird der Inhalt einer jeden andern Kugel aus ihrem Durchmesser gefunden, indem man folgendergestalt schließt: Wie der Würfel des Durchmessers der bekannten Kugel sich zu dem Würfel des Durchmessers der unbekannten verhält; so verhält sich der körperliche Inhalt der bekannten Kugel zu dem gesuchten körperlichen Inhalt der unbekannten. Man kann zu der bekannten Kugel eine jede wählen, welche man will. Am bequemsten ist es, eine Kugel anzunehmen, deren Durchmesser = 1, und dessen Würfel folglich gleichfalls 1, nemlich 1 Cubikruthe oder 1 Cubikfuß oder 1 Cubikmeile u. dergl. ist, je nachdem der Durchmesser 1 Ruthe oder 1 Fuß oder 1 Meile angenommen wird. Der Inhalt der Kugel ist demnach $\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \times 1^3$ d. i. $\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8}$ oder 0,5235988..

oder

oder kürzer 0,5236. Wenn nun z. B. der Erdkugelinhalt gefunden werden soll, so wird geschlossen:

$1^3 : 1719^3 = 0{,}5236 :$ körperlicher Inhalt der Erde.

5) Die Rechnung selbst ist eigentlich von der vorigen nicht unterschieden. Indessen erhellt aus derselben, wie die Berechnung anzustellen sey, wenn umgekehrt der Inhalt einer Kugel gegeben ist, und deren Durchmesser gefunden werden soll. Der Inhalt einer Kugel sey z. B. 5000 Cubikfuß: so wird durch folgende Proportion

0,5236 : 5000 = 1 : vierte Pr. Z.

zum vierten Gliede der Inhalt des Würfels ihres Durchmessers gefunden; und man findet sodann den Durchmesser selbst, wenn hieraus die Cubikwurzel gezogen wird.

4) Der körperliche Inhalt **unordentlicher Körper** kann gefunden werden, wenn man sie in ein senkrechtes cylindrisches oder prismatisches Gefäß, dessen Inhalt leicht zu berechnen, und welches mit Wasser oder feinem Sande angefüllt ist, versenkt, die Höhe des Wassers oder Sandes in dem Gefäß bemerkt, hierauf den Körper wieder herausnimmt, und den körperlichen Inhalt des Raums mißt, um welchen das Wasser oder der Sand gefallen ist, welcher Raum dem gesuchten Inhalt des Körpers gleich ist.

Anmerk. 1) Außer dem Würfel und der Kugel gehören noch das körperliche Viereck, Achteck, Zwölfeck und Zwanzigeck zu den ordentlichen Körpern. Die Netze derselben sind in Fig. 63., 64., 65., 66. verzeichnet. Die Seiten des Vierecks Fig. 63. sind vier, des Achtecks Fig. 64. acht, des Zwanzigecks Fig. 66. zwanzig gleiche gleichseitige Dreyecke, die Seiten des Zwölfecks aber zwölf gleiche ordentliche Fünfecke. Außer diesen ist noch der archimedische Körper zu merken, dessen Netz Fig. 67. darstellt, und dessen Oberfläche von 18 gleichen Quadraten und acht gleichen gleichseitigen Dreyecken, deren Seiten den Seiten der Quadrate gleich sind, gebildet wird. Aus den Figuren selbst erhellt leicht, wie sowol diese, als die Netze der übrigen Körper gezeichnet werden müssen.

2) Ein Visirstab ist ein hölzerner oder metallener Stab, vermittelst dessen man sogleich erfahren kann, wie viel Kannenmaaß ein Faß enthalte, wenn man entweder die

Weite und Höhe des Fasses damit mißt, oder denselben nur gehörig durch das Spundloch hineinstekt. Die Einrichtung desselben gründen sich darauf, daß ein Cylinder zwey- dreymal u. s. w. so groß als ein anderer ist, der mit ihm gleiche Höhe hat, wenn seine Grundfläche zwey- dreymal u. s. w. größer als die Grundfläche dieses andern ist. Die Regel, einen Kreis zu finden, welcher zwey- drey- und mehrmal größer als ein anderer, d. i. welcher der Summe von zween, drey und mehreren gleichen Kreisen gleich ist, folgt aus dem, was im Vorhergehenden (Fr. 21. Anmerk. 9.) angeführt ist. Ein Caliberstab dient dazu, die Schwere einer Kanonenkugel sogleich aus ihrem Durchmesser zu finden.

Von den Progressionen und Logarithmen.

36. Was ist eine Progression?

Eine Reihe Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetz auf einander folgen.

Z. B. Alle Quadrate, Würfel und höhere Potenzen der natürlichen Zahlen machen eine Progression, oder schlechthin eine Reihe; als

1 4 9 16 25 36 49 &c. ist d. Anfang d. Reihe d. Quadrate,
1 8 27 64 125 216 343 &c. ist d. Anfang der Reihe der Würfel der natürlichen Zahlen.

Anmerk. Eine jede Zahl der Progression wird ein Glied derselben genannt. Die wichtigsten Progressionen sind die arithmetischen und geometrischen, von welchen hier einiger Begrif gegeben werden soll, vornehmlich in soforn es die Rechnung mit Logarithmen erfordert.

37. Was ist eine arithmetische Progression?

Eine Reihe Zahlen, in welcher jedes Glied vom dem nächstfolgenden um einerley Zahl verschieden ist.

Z. B. In der Reihe der natürlichen Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 &c. ist jedes Glied von dem nächstfolgenden um 1 verschieden; diese Zahlen sind demnach in einer arithmetischen Progression. Folgende Reihen sind ebenfalls arithmetisch:

5 9 13 17 21 &c. wo jedes Glied um 4 kleiner,
37 34½ 32 29½ 27 &c. wo jedes Glied um 2½ größer,
0,5 1,25 2 2,75 3,5 &c. wo jedes Glied um 0,75 kleiner,
1 2,4142136 ... 3,8284272 ... 5,2426408 ... &c. wo jedes Glied um √2 oder 1,4142136 kleiner ist, als das nächstfolgende.

Anmerk.

Anmerk. Die Zahl, um welche die zunächst auf einander folgenden Glieder der arithmetischen Progression verschieden sind, heißt die Differenz der Progression. Sie hat das Zeichen +, wenn die Progression steigend ist, d. i. wenn die folgenden Glieder größer als die vorhergehenden sind; das Zeichen — aber, wenn die Progression fallend ist. Z. B. bey der Progression 5 9 13 17 ꝛc. ist die Differenz + 4, bey der Progression 37 $34\frac{1}{2}$ 32 $29\frac{1}{2}$ ꝛc. ist die Differenz $-2\frac{1}{2}$. Uebrigens kann jede steigende Progression durch die Addition, und jede fallende Progression durch die Subtraction der Differenz leicht weiter fortgesetzt werden.

38. Welches sind die Eigenschaften der arithmetischen Progression?

2) Jedes Glied einer arithmetischen Progression ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen dem nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Gliede.

Z. B. In der Progression 5 9 13 17 21 25 ꝛc. ist 9 die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 5 und 13; 13 zwischen 9 und 17 u. s. w. Oder es ist $5 - 9 = 9 - 13$; $9 - 13 = 13 - 17$ u. s. w.

Anmerk. 1) Die arithmetischen Progressionen sind nemlich fortgesetzte stetige arithmetische Proportionen. Z. B. die folgende fortgesetzte arithmetische Proportion

$5 - 9 = 9 - 13 = 13 - 17 = 17 - 21 = 21 - 25$ ꝛc.

enthält nach der Reihe sämtliche Glieder der obigen Progression.

2) Wenn daher zwischen jede zwey zunächst auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression die mittlere arithmetische Proportionalzahl gesucht und zwischen dieselben gesetzt wird; so entsteht eine neue richtige arithmetische Progression. Z. B. Aus der Reihe

5 9 13 17 21 25 ꝛc.

wird die Reihe 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 ꝛc.

indem 7, 11, 15, 19, 23 die mittleren arithmetischen Proportionalzahlen zwischen 5 und 9; 9 und 13; 13 und 17; 17 und 21; 21 und 25 sind. Diese Rechnung, wodurch Glieder eingeschaltet werden, kann mit der auf diese Art gefundenen Progression aufs neue vorgenommen, und überhaupt ohne Ende wiederholt werden. Eine solche Wiederholung der Einschaltung ist bey einer andern Progression in den folgenden beyden Tafeln dem Anfange nach weitläuftiger vorgestellt werden.

I.	II.	III.	IV.
0	0	0	0
			0 1/8
		0 1/4	0 2/8
			0 3/8
	0 1/2	0 1/2	0 4/8
			0 5/8
		0 3/4	0 6/8
			0 7/8
1	1	1	1
			1 1/8
		1 1/4	1 2/8
			1 3/8
	1 1/2	1 1/2	1 4/8
			1 5/8
		1 3/4	1 6/8
			1 7/8
2	2	2	2
			2 1/8
		2 1/4	2 2/8
			2 3/8
	2 1/2	2 1/2	2 4/8
			2 5/8
		2 3/4	2 6/8
			2 7/8
3	3	3	3
			3 1/8
		3 1/4	3 2/8
			3 3/8
	3 1/2	3 1/2	3 4/8
			3 5/8
		3 3/4	3 6/8
			3 7/8
4	4	4	4
			4 1/8
		4 1/4	4 2/8
			4 3/8
	4 1/2	4 1/2	4 4/8
			4 5/8
		4 3/4	4 6/8
			4 7/8
5	5	5	5
26.	26.	26.	26.

I.	II.	III.	IV.
0	0	0	0
			0,125
		0,25	0,25
			0,375
	0,5	0,5	0,5
			0,625
		0,75	0,75
			0,875
1	1	1	1
			1,125
		1,25	1,25
			1,375
	1,5	1,5	1,5
			1,625
		1,75	1,75
			1,875
2	2	2	2
			2,125
		2,25	2,25
			2,375
	2,5	2,5	2,5
			2,625
		2,75	2,75
			2,875
3	3	3	3
			3,125
		3,25	3,25
			3,375
	3,5	3,5	3,5
			3,625
		3,75	3,75
			3,875
4	4	4	4
			4,125
		4,25	4,25
			4,375
	4,5	4,5	4,5
			4,625
		4,75	4,75
			4,875
5	5	5	5
26.	26.	26.	26.

Zur Erläuterung dieser Tafeln dient folgendes. Die arithmetische Progression, bey welcher die Einschaltung wiederholt geschehen ist, hat o zum ersten Gliede und + 1 zur Differenz. Sie ist also die Reihe der natürlichen Zahlen. Der Anfang dieser Reihe steht in den mit I. bezeichneten ersten Columnen beyder Tafeln. Wenn zwischen jede zwey Glieder dieser Reihe die mittlere arithmetische Proportionalzahl gesucht, und in ihre Stelle gehörig gesetzt wird; so entsteht folgende zweyte Progression:

o $o\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$ 3 $3\frac{1}{2}$ 4 $4\frac{1}{2}$ 5 u. s. w.

oder, wenn anstatt der gemeinen Brüche Decimalbrüche gesetzt werden:

o 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 5 u. s. w.

Diese beyde Reihen stehen in den mit II. bezeichneten zweyten Columnen beyder Tafeln. Wenn ferner zwischen jede zwey Glieder dieser zweyten Progression von neuen ein Glied eingeschaltet wird; so entsteht folgende dritte Progression:

o $o\frac{1}{4}$ $o\frac{1}{2}$ $o\frac{3}{4}$ 1 $1\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{2}$ $1\frac{3}{4}$ 2 $2\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2}$ $2\frac{3}{4}$ 3 ꝛc. ꝛc.

oder o 0,25 0,5 0,75 1 1,25 1,5 1,75 2 2,25 2,5 2,75 3 ꝛc. ꝛc.

Diese beyden Reihen stehen in den mit III. bezeichneten dritten Columnen beyder Tafeln. Wenn auf eine ähnliche Art bey dieser dritten Progression eingeschaltet wird; so entsteht eine vierte Progression, deren Glieder, sowol durch gemeine als durch Decimalbrüche ausgedruckt, in den mit IV. bezeichneten Columnen beyder Tafeln stehn. Auf diese Art kann aus der vierten Progression durch fortgesetzte Einschaltung eine fünfte, aus der fünften eine sechste u. s. w. ohne Ende gefunden werden.

3) Es erhellt aus diesen Tafeln, daß zwischen jede zwey Paar Glieder der hier zur Wiederholung der Einschaltung gewählten ersten Progression, welche zunächst auf einander folgen, z. B. zwischen dem Paar o und 1, und dem Paar 1 und 2, oder 2 und 3 ꝛc. fallende Glieder der folgenden Progressionen Brüche erhalten, welche nach der Reihe immer eben dieselben bleiben. So wie nemlich z. B. in der vierten Progression auf das Glied o folgende Glieder folgen:

$o\frac{1}{8}$ $o\frac{2}{8}$ $o\frac{3}{8}$ $o\frac{4}{8}$ $o\frac{5}{8}$ $o\frac{6}{8}$ $o\frac{7}{8}$ oder 0,125 0,25 0,375 0,5 0,625 0,75 0,875

$1\frac{1}{8}$ $1\frac{2}{8}$ $1\frac{3}{8}$ $1\frac{4}{8}$ $1\frac{5}{8}$ $1\frac{6}{8}$ $1\frac{7}{8}$ oder 1,125 1,25 1,375 1,5 1,625 1,75 1,875 u. s. w.

wo die Glieder, welche gleichweit von der nächstvorhergehenden ganzen Zahl abstehn, nach der Reihe einerley

Brüche haben. Wenn daher die zwischen zwey Glieder der ersten Progression bey der Einschaltung fallende Glieder bekannt sind; so können die zwischen jede zwey andere Glieder dieser Progression fallende Glieder leicht angegeben werden. So erhellet z. B. daß auf das Glied 5 in der vierten Progression folgende Glieder folgen werden:

$5\frac{1}{8}$ $5\frac{1}{4}$ $5\frac{3}{8}$ $5\frac{1}{2}$ $5\frac{5}{8}$ $5\frac{3}{4}$ $5\frac{7}{8}$ 6 $6\frac{1}{8}$ $6\frac{1}{4}$ u. s. w.

Uebrigens erhellt auch, daß die Differenzen solcher durch Einschaltung aus einander entstehenden Progressionen immer kleiner werden müssen.

2) Jedes Glied einer steigenden arithmetischen Progression ist der Summe des ersten Gliedes und desjenigen Vielfachen der Differenz derselben gleich, dessen Zahl anzeigt, um wie viel Stellen das Glied von dem ersten Glied entfernt ist. Bey einer fallenden Progression aber ist jedes Glied dem Ueberschuß des ersten Gliedes über dieses Vielfache der Differenz gleich.

Z. B. Weil das sechste Glied einer jeden Progression um fünf Stellen von dem ersten Gliede entfernt ist; so ist dasselbe in einer steigenden Progression der Summe des ersten Gliedes und des Fünffachen der Differenz, in einer fallenden Progression aber dem Ueberschuß des ersten Gliedes über das Fünffache der Differenz gleich. In der steigenden Progression

37 41 45 49 53 57 61

wo das erste Glied 37, und die Differenz 4 ist, ist das sechste Glied $57 = 37 + 5 \times 4$; in der fallenden Progression

37 33 29 25 21 17 13

wo das erste Glied und die Differenz die vorigen sind, ist das sechste Glied $17 = 37 - 5 \times 4$.

Anmerk. 1) Weil nemlich jedes Glied der Progression entsteht, indem die Differenz zu dem nächstvorhergehenden Gliede addirt, oder von demselben subtrahirt wird; so ist z. B. in der steigenden Progression, deren erstes Glied 37 und die Differenz 4 ist,

das

das zweyte Glied $37+4$ d. i. $37+1\times 4$
folglich das dritte Glied $37+4+4$ d. i. $37+2\times 4$
folglich das vierte Glied $37+4+4+4$ d. i. $37+3\times 4$ u. s. w.

und in der fallenden Progression, deren erstes Glied und Differenz die vorigen sind, ist

das zweyte Glied $37-4$ d. i. $37-1\times 4$
folglich das dritte Glied $37-4-4$ d. i. $37-2\times 4$
folglich das vierte Glied $37-4-4-4$ d. i. $37-3\times 4$ u. s. w.

Es ist aber das zweyte Glied um eine, das dritte um zwo, das vierte um drey ꝛc. Stellen vom ersten Gliede entfernt.

2) Hieraus erhellet zugleich die Regel, wie ein jedes Glied einer Progression gefunden werde, wenn das erste Glied und die Differenz derselben bekannt ist. Z. B. Folgende Progression ist die Reihe der ungeraden Zahlen

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 ꝛc.

Wenn nun z. B. die vierzigste ungerade Zahl, d. i. das vierzigste Glied dieser Progression gefunden werden soll, ohne dieselbe mühsam bis zu diesem Gliede fortzusetzen; so wird, weil dieses Glied das 39ste nach dem ersten Gliede und die Progression steigend ist, das 39fache der Differenz 2, welches 78 ist, zu dem ersten Gliede 1 addirt. Die Summe 79 ist das gesuchte Glied. Auf diese Art wird auch das letzte Glied einer arithmetischen Progression gefunden, wenn zugleich die Anzahl aller Glieder derselben bekannt ist.

3) Wenn das erste Glied einer steigenden Progression von dem letzten, oder das letzte Glied einer fallenden Progression von dem ersten Gliede abgezogen wird; so ist der Rest ein Vielfaches der Differenz, dessen Zahl der Zahl der Stelle gleich ist, in welcher das letzte Glied nach dem ersten steht; z. B. ein Fünffaches, wenn die Progression sechs Glieder hat. Wenn daher das erste und letzte Glied einer Progression nebst der Anzahl der Glieder gegeben sind; so findet man die Differenz der Progression, indem man den Unterschied der gegebenen Glieder mit der Zahl dividirt, welche anzeigt, um wie viel Stellen das letzte Glied vom ersten Gliede entfernt sey. Der Quotient ist die gesuchte Differenz. Z. B. Die Progression sey

2, 16 36

wo die Puncte die unbekannten Glieder anzeigen. Hier wird also, um die Differenz der Progression zu finden, 16 von 36 abgezogen, und der Rest 20 hierauf durch 10 dividirt, weil 36 das zehnte Glied nach dem ersten, folglich

20 das zehnfache der Differenz ist. Der Quotient 2 ist die gesuchte Differenz, und die ganze Progression ist folgende:

16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36

Wenn dagegen die Progression 101 Glied haben, folglich 36 das 100ste Glied nach dem ersten seyn soll; so muß 20 durch 100 dividirt werden, da denn der Quotient 0,2 die Differenz der Progression ist, deren erste Glieder folgende sind:

16 16,2 16,4 16,6 16,8 17 17,2 17,4 17,6 17,8 18 ꝛc.

4) Ein jedes einzelne Glied einer solchen Progression, deren erstes und letztes Glied nebst der Anzahl der Glieder bekannt sind, würde auch hier, nach dem Vorhergehenden, ohne die übrigen berechnet werden können, wenn, nachdem die Differenz der Progression nach den jetzt gegebenen Regeln gefunden worden, zu dem ersten Gliede dasjenige Vielfache derselben, welches die Stelle des zu findenden Gliedes bestimmt, addirt wird. Soll z. B. bey der vorigen Progression, deren Differenz 0,2 schon gefunden ist, das 55ste Glied, d. i. das 54ste nach dem ersten Gliede, gefunden werden; so wird die Differenz 0,2 mit 54 multiplicirt, und das Product 10,8 zum ersten Gliede 16 addirt. Die Summe 26,8 ist das gesuchte Glied. Wenn man indessen diese Aufgabe durch folgende Frage ausdruckt: Wenn ein Glied von dem ersten Gliede um 100 Stellen entfernt ist; so ist der Unterschied beyder Glieder 20; wie groß ist dieser Unterschied, wenn ein Glied von dem ersten Gliede um 54 Stellen entfernt ist? so erhellet, daß die vorhin gefundene Zahl 10,8 leichter durch die Regel de tri gefunden werde, indem geschlossen wird:

100 : 54 = 20 : unbek. Gl.

20

1080 | 10,8

100)

Nach der vorigen Rechnung wurde nemlich zuerst 20 mit 100 dividirt, und der Quotient 0,2 mit 54 multiplicirt; nach der gegenwärtigen Rechnung ist nur umgekehrt 20 zuerst mit 54 multiplicirt, und das Product mit 100 dividirt, daher eben dieselbe Zahl herauskommen muß. Diese Rechnung kommt bey dem Gebrauch der Logarithmen häufig vor, wozu folgende Beyspiele zur Vorbereitung dienen.

Erstes Beyspiel. Es soll zwischen folgenden Gliedern einer Progression, welche nebst den fehlenden Gliedern Irrationalzahlen sind,

4/3617278 . . . . . 4/3619166 . . .

und

und wo das letzte Glied um 10 Stellen von dem ersten entfernt ist, das achte Glied der Reihe, d. i. das siebente nach dem ersten Gliede, gefunden werden; so ist die Rechnung folgende:

I. 4,3619166... II. 10 : 7 = 0,0001888... : unbek. Gl. III. 4,3617278...
4,3617278... 7 0,0001322...

0,0001888... 0,00013216.. 4,3618600 achtes Glied.
10)
0,00013216..

Hier ist zuvörderst das erste Glied von dem letzten Gliede abgezogen, und hierauf geschlossen worden: Wenn die Glieder um 10 Stellen entfernt sind; so ist ihr Unterschied 0,0001888; wie groß ist der Unterschied der Glieder, die nur um 7 Stellen von einander entfernt sind? da denn 0,00013216, oder, wenn die achte Decimalziffer weggelassen, und weil sie mehr als 5 beträgt, die siebente Ziffer um 1 vermehrt wird, 0,0001322 herauskommt, welche Zahl anzeigt, daß das gesuchte Glied um 0,0001322 von dem ersten Gliede unterschieden, und zwar so viel größer, als dasselbe, sey. Daher ist endlich dieselbe zum ersten Gliede addirt worden. Die Summe 4,3618600 ist das gesuchte Glied.

Zweytes Beyspiel. Es soll zwischen folgenden Gliedern einer Progression, welche gleichfalls, wie die fehlenden Glieder, Irrationalzahlen sind,

5,3617278 .. • • • • — • • • • 5,3619166...

und wo das letzte Glied um 100 Stellen von dem ersten Gliede entfernt seyn soll, das 76ste Glied der Reihe, oder das 75ste nach dem ersten Gliede gefunden werden. Die Rechnung ist folgende:

I. 5,3619166.. II. 100 : 75 = 0,0001888.. : unbek. Gl. III. 5,3617278..
5,3617278.. od. 4 : 3 = 0,0001888 : — 0,0001416..
od. 1 : 3 = 0,0000472 : —

0,0001888.. 3 5,3618694 gesuchte Glied.
0,0001416

Hier ist die Rechnung auf die vorige Art gemacht worden, nur konnte die Differenz leichter berechnet werden, indem zuvörderst das erste und zweyte Glied der Proportion (in II.) durch 25, und hiernächst das erste und dritte Glied durch 4 dividirt werden konnten.

5) Wenn bey dem vorhergehenden Beyspiel in der Proportion

100 : 75 = 0,0001888 : 0,0001416

das

das zweyte Glied 73 unbekannt, die drey übrigen aber bekannt gewesen wären; so würde die Proportion folgendergestalt zu ordnen gewesen seyn:

0,0001888 : 0,0001416 = 100 : unbek. Gl.

da denn 75 herausgebracht seyn würde. Hieraus erhellt, wie zu verfahren sey, wenn die Aufgabe umgekehrt folgende ist: Außer dem ersten und letzten Gliede und der Anzahl aller Glieder einer arithmetischen Progression ist ein mittleres Glied derselben gegeben; es soll gefunden werden, das wievielte nach dem ersten Gliede dasselbe sey? Es seien die 3 gegebenen Glieder folgende:

3,3617278 .. . . — . . 3,3618694 .. . . — . . 3,3619166 ..

das letzte Glied sey das hundertste nach dem ersten Gliede; so wird die Berechnung, das wievielste Glied das mittlere gegebene nach dem ersten sey, folgendergestalt gemacht: (1) Es wird zuvörderst das erste Glied sowol von dem letzten, als auch von dem gegebenen mittleren Gliede subtrahirt. Der erste Rest ist 0,0001888; der andere 0,0001416. (2) Hierauf wird folgende Frage in Proportion gesetzt: Wenn der Unterschied der Glieder der Progressionen 0,0001888 beträgt, so sind sie um 100 Stellen von einander entfernt; um wieviel Stellen sind diejenigen Glieder von einander entfernt, deren Unterschied 0,0001416 beträgt? Die Proportion ist hiernach die obige

0,0001888 : 0,0001416 = 100 : unbek. Gl.

welche, wenn die beyden ersten Glieder mit 10000000 multiplicirt werden, folgende bequemere Gestalt erhält

1888 : 1416 = 100 : unbek. Gl.

Die Rechnung giebt 75 zum vierten Gliede, und das gegebene mittlere Glied der Progression ist demnach das 75ste nach dem ersten Gliede.

Beyspiele zur Uebung. 1) Es seien folgende drey Glieder einer arithmetischen Progression gegeben:

. . . — 11 — . . . 29

Die Zahl der Glieder sey 13, folglich 29 das 12te nach dem ersten Gliede. Um zu finden, das wievielte Glied 11 nach dem ersten sey, wird 5 sowol von 29, als von 11 abgezogen, und die Reste 24 und 6 mit der Zahl der Stelle des letzten Gliedes folgendergestalt in Proportion gesetzt:

24 : 6 = 12 : unbek. Gl.

da 3 herauskommt, welches anzeigt, daß in dieser Progression 11 das dritte Glied nach dem ersten sey. Sie ist nemlich folgende:

5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

2) Es

2) Es seyn folgende drey Glieder einer Progression gegeben, deren letztes Glied das 100ste nach dem ersten sey:

5,3710679 . . . • • • — • • 5,3712155 . . • • — • 5,3712524

so ist die Berechnung der Stelle des gegebenen mittleren Gliedes folgende:

I. 5,3712524 II. 5,3712155 III. 0,0001845 : 0,0001476 = 100. : vierte
5,3710679 5,3710679 oder 1845 : 1476 = 100 : Pr. Z.

0,0001845 0,0001476

100

1845) 147600 | 80
14760

0

das gegebene Glied ist demnach das 80ste nach dem ersten Gliede.

3) Die arithmetische Verhältniß jeder zweyer Glieder einer arithmetischen Progression ist der arithmetischen Verhältniß jeder zweyer andern Glieder derselben gleich, welche um eben so viele Stellen, als jene, von einander entfernt sind.

Z. B. Das zweyte Glied verhält sich zum fünften, welches das dritte nach ihm ist, wie ein jedes anderes Glied derselben Progression zu dem dritten nach ihm, z. B. wie das vierte zum siebenten. Das sechste Glied verhält sich zum zweyten, welches das vierte vor ihm ist, wie jedes andere Glied zu dem vierten vor ihm, z. B. wie das neunte zum fünften, u. s. w. In folgender Progression

5 9 13 17 21 25 29 33 37 41 45 ꝛc.

ist 9 — 21 = 17 — 29 und 25 — 9 = 37 — 21.

Anmerk. 1) Die gleich weit von einander entfernten Glieder sind nemlich um ein gleichgroßes Vielfaches der Differenz, z. B. die um 3 Stellen von einander entfernten Glieder um das Dreyfache der Differenz, von einander unterschieden, und es sind folglich die Differenzen ihrer Verhältnisse gleich.

2) Wenn umgekehrt vier Glieder einer arithmetischen Progression in einer arithmetischen Proportion stehn, so muß das vierte dieser Glieder von dem dritten um eben so viele Stellen, als das zweyte von dem ersten entfernt seyn. Z. B. Weil die vier Glieder der obigen Progression 13 33 21 41 in

einer

einer arithmetischen Proportion stehn, indem 13 — 33 = 21 — 41, und 33 das fünfte Glied nach dem Gliede 13, folglich um das Fünffache der Differenz größer, als dieses ist; so muß auch 41 das fünfte Glied nach 21 seyn. Denn kein anderes Glied, als dieses, kann in derselben Progression gleichfalls um das Fünffache der Differenz größer seyn, als 21.

4) Die Summe jeder zweyer Glieder einer arithmetischen Progression, welche von den beyden äußersten gleichweit entfernt sind, ist der Summe dieser äußersten Glieder gleich, und wenn die Progression ein mittelstes Glied hat, so ist dasselbe die Hälfte dieser Summe.

Z. B. Wenn die Progression 8 Glieder hat, und folgende ist:

5 9 13 17 21 25 29 33

so ist die Summe des ersten und achten Gliedes $5 + 33 = 38$
des zweyten und siebenten $9 + 29 = 38$
des dritten und sechsten $13 + 25 = 38$
des vierten und fünften $17 + 21 = 38$

Wenn ferner die Progression 5 Glieder, folglich ein mittelstes, hat, und folgende ist:

5 9 13 17 21

so ist die Summe des ersten u. fünften Gliedes $5 + 21 = 26$
des zweyten und vierten $9 + 17 = 26$
und das dritte Glied 13

welches die Hälfte von 26 ist.

Anmerk. 1) Nach der vorhin angeführten dritten Eigenschaft der arithmetischen Progressionen entstehn nemlich folgende Proportionen bey der obigen ersten Progression:

$5 — 9 = 29 — 33$
$5 — 13 = 25 — 33$
$5 — 17 = 21 — 33$

und bey der zweyten Progression:

$5 — 9 = 17 — 21$
$5 — 13 = 13 — 21$

In diesen Proportionen ist aber die Summe der äußern Glieder der Summe der mittleren gleich, und die äußern Glieder sind durchgängig eben dieselben.

2) Wenn in dem ersten der hier gegebenen Beyspiele die Zahl 38 mit 4, der Hälfte der Anzahl aller Glieder 8, und in dem zweyten die Zahl 26 mit $2\frac{1}{2}$, der Hälfte der Anzahl aller Glieder 5, multiplicirt wird: so ist jedes der Producte 152 und 65 der Summe aller Glieder der Progression, zu welcher die Factoren gehören, gleich; nemlich 152 ist die Summe aller Glieder in der ersten, und 65 die Summe aller Glieder in der zweyten Progression. Ueberhaupt wird die Summe aller Glieder einer jeden arithmetischen Progression gefunden, wenn man die Summe der beyden äußersten Glieder mit der halben Anzahl aller Glieder multiplicirt; oder, welches einerley, oft aber bequemer ist: wenn man die Summe der beyden äußersten Glieder mit der Anzahl aller Glieder multiplicirt, und das Product mit 2 dividirt.

Beyspiele zur Uebung. Es soll die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 gefunden werden. Weil diese Zahlen in einer arithmetischen Progression stehen, welche folgende Gestalt hat:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 998 999 1000

so werden die beyden äußersten Glieder 1 und 1000 addirt, und die Summe 1001 mit der halben Anzahl der Glieder, d. i. mit 500 multiplicirt. Das Product 500500 ist die gesuchte Summe.

Es sey die Summe der ersten 27 Glieder der folgenden Progression zu finden:

5 8 11 14 17 20 23 26 29 u. s. w.

Hier muß zuvörderst das letzte oder 27ste Glied gefunden werden. Nach dem Vorhergehenden ist dasselbe $= 5 + 26 \text{ mal } 3 = 83$. Hieraus wird entweder die Summe $83 + 5$ oder 88 mit der Hälfte von 27, d. i. mit $13\frac{1}{2}$ multiplicirt, da denn das Product die gesuchte Summe ist; oder es wird 88 mit 27 multiplicirt, und das Product 2376 mit 2 dividirt. Der Quotient 1188 ist die gesuchte Summe.

39. Was ist eine geometrische Progression?

Eine Reihe Zahlen, in welcher alle Glieder zu den nächstfolgenden einerley geometrische Verhältniß haben.

Z. B. Die Reihe 1 2 4 8 16 32 64 128 ꝛc. iſt eine geometriſche Progreſſion, weil in derſelben jedes Glied ſich zu dem nächſtfolgenden, wie 1:2 verhält. Ferner die Reihe 4 5 $6\frac{1}{4}$ $7\frac{1}{16}\frac{3}{6}$ ꝛc. iſt geometriſch, weil jedes Glied derſelben ſich zum nächſtfolgenden, wie 4:5 oder wie 1 : $\frac{5}{4}$ verhält.

Anmerk. 1) Wenn das erſte Glied einer geometriſchen Progreſſion, und die Verhältniß der Glieder derſelben gegeben iſt; ſo können die Glieder der Progreſſion ſelbſt nach der Reihe leicht gefunden werden. Es ſey das erſte Glied der zu findenden Progreſſion 7, und die Verhältniß 2:3; ſo wird das zweyte Glied der Progreſſion gefunden, indem geſchloſſen wird:

2 : 3 = 7 : zweyt. Gl. der Progr.

da $10\frac{1}{2}$ herauskommt. Aus dieſem zweyten Gliede wird das dritte gefunden, indem von neuen geſchloſſen wird:

2 : 3 = $10\frac{1}{2}$: drit. Gl. der Progr.

da $15\frac{3}{4}$ herauskommt. Aus dieſem dritten Gliede wird auf eben die Art das vierte, aus dem vierten das fünfte u. ſ. w. gefunden.

2) Wenn das erſte Glied der Verhältniß der Progreſſion nicht 1 iſt; ſo kann dieſelbe allemal in eine ihr gleiche Verhältniß verwandelt werden, deren erſtes Glied 1 iſt. In dieſem Fall wird jedes Glied der Progreſſion aus dem nächſtvorhergehenden durch eine bloße Multiplication gefunden. Z. B. in der Progreſſion 9 27 81 243 ꝛc. iſt die Verhältniß 9 : 27 der Verhältniß 1 : 3 gleich, und jedes Glied der Progreſſion wird aus dem nächſtvorhergehenden gefunden, indem daſſelbe mit 3 multiplicirt wird. Die Zahl, mit welcher in dieſem Fall multiplicirt werden muß, heißt der Exponent der Progreſſion. Iſt der Exponent ein eigentlicher Bruch, folglich kleiner als 1; ſo iſt die Progreſſion fallend; iſt aber der Exponent größer als 1, ſo iſt die Progreſſion ſteigend. Z. B. Die Progreſſion 4 5 $6\frac{1}{4}$ $7\frac{1}{16}\frac{3}{6}$ $9\frac{4}{64}\frac{0}{4}$ ꝛc. iſt ſteigend, die Verhältniß derſelben 4:5 iſt der Verhältniß 1 : $1\frac{1}{4}$ gleich, folglich iſt $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ der Exponent der Progreſſion, welcher größer als 1 iſt. Die Progreſſion 8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ ꝛc. iſt fallend, die Verhältniß derſelben 8 : 4 iſt der Verhältniß 1 : $\frac{1}{2}$ gleich, folglich iſt $\frac{1}{2}$ der Exponent, welcher kleiner als 1 iſt.

40. Wei-

40. Welches sind die allgemeinen Eigenschaften der geometrischen Progression?

1) Ein jedes Glied der geometrischen Progression ist die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen dem nächstvorhergehenden und dem nächstfolgenden Gliede.

Z. B. In der Progression 1 2 4 8 16 32 64 128 ꝛc. ist das zweyte Glied die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen dem ersten und dritten, das dritte zwischen dem zweyten und vierten u. s. w. oder es ist 1 : 2 = 2 : 4; 2 : 4 = 4 : 8; 32 : 64 = 64 : 128.

Anmerk. 1) Die geometrischen Progressionen sind nemlich fortgesetzte stetige geometrische Proportionen. Z. B. die folgende fortgesetzte Proportion

1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64 = 64 : 128 ꝛc.

giebt nach der Reihe sämmtliche Glieder der obigen Progression, und zwar entstehn jede 3 auf einander folgende Glieder der Progression aus 2 gleichen Verhältnissen, jede 4 dergleichen Glieder entstehn aus 3 gleichen Verhältnissen u. s. w. Die 3 Glieder 1 2 4 entstehn aus den Verhältnissen 1 : 2 2 : 4; die 4 Glieder 1 2 4 8 entstehn aus den 2 Verhältnissen 1 : 2 2 : 4 4 : 8 u. s. w. Jede Verhältniß ist der Verhältniß der Progression gleich.

2) Wenn demnach unter eine geometrische Progression die Reihe der natürlichen Zahlen so gesetzt wird, daß 1 unter dem zweyten Gliede, folglich 0 unter dem ersten Gliede steht, wie z. B. folgendergestalt:

geometr. Progr.	1	2	4	8	16	32	64	128 ꝛc.
Reihe d. natürl. Z.	0	1	2	3	4	5	6	7 ꝛc.

so zeigt jede Zahl der untern Reihe an, wie viel gleicher Verhältnisse, deren jede der Verhältniß der Progression gleich ist, die Progression von dem ersten Gliede an bis zu dem darüber stehenden Gliede enthalte. Z. B. die Zahl 5 in der untern Reihe zeigt an, daß die Progression von dem ersten Gliede an bis zu dem über der Zahl 5 stehenden Gliede 32 fünf gleiche Verhältnisse enthalte, deren jede der Verhältniß 1 : 2 gleich ist. Diese 5 Verhältnisse sind nemlich

1 : 2 2 : 4 4 : 8 8 : 16 16 : 32

3) Wenn das erste Glied einer solchen geometrischen Progression 1 ist; so werden die Zahlen der untern Reihe die Logarithmen der ihnen zugehörigen Zahlen der Progression genannt. Das Wort Logarithme, welches griechischen Ursprungs ist, bedeutet nemlich so viel als Zahl der Verhältnisse. So heißt z. B. in der obigen Progression 5 der Logarithme von 32; 4 der Logarithme von 16; 7 der Logarithme von 128, u. s. w. Der Logarithme von 1 ist 0.

4) Wenn mit einer andern geometrischen Progression eben so verfahren wird; so gehören die Zahlen der untern Reihe, als Logarithmen, andern Zahlen, als vorhin, zu. In dem folgenden Beyspiele

geom. Progr.	1	10	100	1000	10000	100000
Reihe der nat. Z.	0	1	2	3	4	5

ist 5 der Logarithme von 100000; 1 der Logarithme von 10 u. s. w. Um demnach zu bestimmen, was für ein Logarithme einer gegebenen Zahl zugehöre, muß die geometrische Progression bestimmt seyn, von welcher die gegebene Zahl ein Glied ist. Diese Progression mit den zugehörigen Logarithmen wird ein logarithmisches System genannt, und es giebt daher unzählig viele logarithmische Systeme, weil es unzählig viele geometrische Progressionen giebt, deren erstes Glied 1 ist. In allen logarithmischen Systemen aber ist 0 der Logarithme von 1.

5) Die Logarithmen sind Zahlen, durch deren Hülfe weitläuftige Rechnungen ungemein abgekürzt werden können, und sie sind daher in der Mathematik von großem Nutzen, daher in folgenden von denselben weiter gehandelt werden wird. In der Mathematik ist dasjenige logarithmische System, dessen geometrische Progression 1 10 100 1000 ꝛc. ist, und welches von seinem Urheber das Briggische System genannt wird, angenommen worden. In den folgenden Anmerkungen über die geometrischen Progressionen sollen daher zur Vorbereitung auf die Rechnung mit Logarithmen vornehmlich von dieser Progression Beyspiele hergenommen werden.

6) Bey einer jeden geometrischen Progression kann auf eine ähnliche Art, wie bey der arithmetischen im Vorhergehenden gezeigt ist, eine Einschaltung anderer Glieder vorgenommen werden, indem zwischen jede zwey zunächst auf einander folgende Glieder derselben die mittlere geometrische Proportionalzahl gesucht wird; auch kann diese Rechnung gleichfalls ohne Ende wiederholt werden, wobey jedoch Irrationalzahlen unvermeidlich sind. Z. B. Wenn zwischen jede zwey Glieder der Progression 1 2 4 8 16 32 ꝛc.

ein

mittlere geometrische Proportionalzahl gesucht und eingeschaltet wird; so entsteht folgende zweyte Progression:

I. 1, 1,4142.. 2 2,8284.. 4 5,6568.. 8 11,3137.. 16 ꝛc.

Wird diese Rechnung, welche desto genauer und richtiger ist, je mehr Decimalbrüche bey jedem Gliede gefunden werden, bey der hier gefundenen Progression von neuen vorgenommen, so entsteht folgende dritte Progression:

I. 1, 1892.. 1,4142.. 1,6824.. 2 2,3784.. 2,8284.. 3,3635.. 4 ꝛc.

7) Bey fortgesetzter Wiederholung dieser Einschaltung entstehen Progressionen, deren Exponenten immer kleiner werden, und deren jede zwey zunächst auf einander folgende Glieder also immer weniger von einander verschieden sind; jedes Glied bleibt nemlich allemal kleiner als das nächstfolgende, und größer als das nächstvorhergehende, wenn die Progression steigend ist. Wenn z. B. zwischen den beyden Gliedern 2,8284.. und 3,3635.. der obigen Progression die Einschaltung wiederholt wird; so kommt 3,0842.. zum mittlern Gliede, welche Zahl von jeder der beyden Glieder weniger, als diese Glieder selbst von einander, verschieden, auch größer als das erste und kleiner als das zweyte derselben, ist. Hieraus folgt unter andern, daß, wenn man die Einschaltung zwischen diesen Gliedern wiederholt fortsetzt, man endlich auf das Glied 3,0000 d. i. auf die ganze Zahl 3, oder doch auf eine Zahl, die der ganzen Zahl 3, welche zwischen die beyden Glieder 2 und 4 der ersten Progression fällt, sehr nahe kommt, und daher ohne beträchtlichen Fehler für die Zahl 3 angenommen werden kann, kommen werde. Wenn auf eben diese Art zwischen den beyden Gliedern 4 und 8 der ersten Progression die Einschaltung fortgesetzt wird; so erhellet eben so, daß man endlich auf folgende Glieder 5,0000.. 6,0000.. 7,0000.. d. i. auf solche Zahlen, welche sämtlichen zwischen 4 und 8 fallenden ganzen Zahlen entweder gleich sind, oder doch ihnen sehr nahe kommen, und daher für solche angenommen werden können, kommen werde; und überhaupt wird aus einer jeden geometrischen Progression durch eine dergleichen wiederholte Einschaltung eine andere herausgebracht werden können, in welcher, außer vielen irrationalen Gliedern, auch in dem angeführten Verstande, alle ganze Zahlen vorkommen.

8) Wenn anstatt der vorigen Progression die folgende gewählt wird:

I. 1 10 100 1000 10000 100000

so entstehen durch die wiederholte Einschaltung nach und nach folgende Progressionen:

I. 1 3,1622... 10 31,622... 100 316,22... 1000 3162,2... 10000 31622,... 100000

II. 1 1,7783... 3,1622... 5,6233... 10 17,783... 31,622... 56,233... 100 177,83... 316,22... ꝛc.

IV. 1 1,33335... 1,7783... 2,3713... 3,1622... 4,2169... 5,6233... 7,4988... 10 13,335... 17,783. ꝛc.

u. s. w.

Hier erhellt, daß die zwischen jede zwey Glieder der ersten Progression, z. B. zwischen 1 und 10, fallende Glieder der folgenden Progressionen nach der Reihe einerley Ziffern, jedoch von verschiedenem Werthe, mit denen Gliedern haben, welche zwischen jede zwey andere Glieder der ersten Progression, z. B. zwischen 10 und 100 fallen. Wie nemlich z. B. in der mit II. bezeichneten Progression die auf 1 folgenden Glieder sind

1,7783. 3,1622. 5,6233.

so sind die auf 10 folgende Glieder

17,783. 31,622. 56,233.

Auch fällt sogleich das Gesetz in die Augen, nach welchem die Werthe der Ziffern zwischen jede zwey Paar Glieder, z. B. zwischen 1 und 10; 10 und 100, verschieden sind. Die auf das Glied 10 folgenden Glieder sind zehnmal größer, als die auf 1 folgenden; die auf 100 folgenden Glieder sind zehnmal größer, als die auf 10 folgenden u. s. w. Wenn demnach bey dieser Progression die Einschaltung nur zwischen zwey Glieder, z. B. zwischen 10000 und 100000 wiederholt wird, so sind die zwischen jede zwey kleineren Glieder einzuschaltenden Glieder leicht zu bestimmen. Uebrigens wird bey fortgesetzter Wiederholung der Einschaltung auch aus dieser Progression endlich eine solche herausgebracht werden, in welcher, außer vielen irrationalen Gliedern, auch alle ganze Zahlen, als Glieder derselben, enthalten sind. Diese Rechnung ist zwar sehr weitläuftig und mühsam, sie ist aber zum Behuf der Rechnung mit den Logarithmen wirklich zu Anfange des vorigen Jahrhunderts zum großen Vortheil der Mathematik, wiewol mit einigen Veränderungen, vorgenommen worden.

9) Durch diese Einschaltung werden die Verhältnisse jeder, zunächst auf einander folgenden Glieder der ersten oder zum Grunde gelegten Hauptprogression in kleinere Verhältnisse zerlegt, welche als Theile dieser Verhältnisse, folglich auch als Theile der Verhältniß der Progression überhaupt

haupt, angesehn und gezählt werden. In der obigen mit II. bezeichneten Progression besteht z. B. die Verhältniß 1 : 10 aus den zwo gleichen Verhältnissen:

1 : 3,1622.. und 3,1622.. : 10

In der mit III. bezeichneten Progression besteht eben diese Verhältniß 1 : 10 aus folgenden vier gleichen Verhältnissen:

a) 1 : 1,7783.. b) 1,7783.. : 3,1622.. c) 3,1622.. : 5,6233.. d) 5,6233.. : 10

In der folgenden vierten Progression besteht diese Verhältniß aus 8 gleichen Verhältnissen, in einer daraus herzuleitenden fünften Progression würde sie aus 16, in der sechsten aus 32 u. s. f. gleichen Verhältnissen bestehen. Auf eben diese Art sind die Verhältnisse 10 : 100; 100 : 1000 u. s. w. in 2, 4, 8 kleinere gleiche Verhältnisse getheilt, und die Theilung in 16, 32 u. s. f. kleinere Verhältnisse kann eben so vorgenommen werden. Wenn eine geometrische Verhältniß durch das Einschalten in zwo gleiche Verhältnisse halb so hoch, als die ganze Verhältniß genannt, und diese heißt dagegen zweymal so hoch, als jede der kleinern. Wenn die Verhältniß in vier kleinere gleiche Verhältnisse getheilt wird, so heißt jede dieser kleineren Verhältnisse $\frac{1}{4}$ so hoch, als die ganze Verhältniß, und diese heißt viermal so hoch, als jede der kleineren, u. s. w.

10) Hieraus erhellet, daß z. B. in der Progression

	1	10	100	1000	10000	100000
Logar.	0	1	2	3	4	5

auch die Verhältniß 1 : 100 zweymal so hoch, als die Verhältniß 1 : 10; die Verhältniß 1 : 1000 dreymal, 1 : 10000 viermal, 1 : 100000 fünfmal so hoch, als eben diese Verhältniß genannt werden müsse. Wenn man daher, wie hier geschehen ist, die Reihe der Logarithmen gehörig untersetzt; so fällt in die Augen, daß die Logarithmen zugleich die Höhe der Verhältniß des ersten Gliedes der Progression zu den ihnen zugehörigen Zahlen, in Vergleichung mit der Verhältniß der Progression anzeigen. Diese Verhältniß wird daher in dieser Rücksicht die einfache Verhältniß genannt. Sie ist 1 : 10 in dem Briggischen System: in dem oben (Anmerk. 2.) vorgestellten System ist sie 1 : 2.

11) Wenn daher die in einer durch Einschaltung erweiterten geometrischen Progression enthaltenen Verhältnisse gleichfalls gezählt, d. i. wenn die Logarithmen der Glieder dieser Progression angegeben werden sollen; so entstehn in

der Reihe der natürlichen Zahlen Brüche, als Logarithmen der eingeschalteten Glieder, wie aus folgenden Vorstellungen erhellet;

(1) Geometr.

Progr. 1 3,1622.. 10 31,622.. 100 316,22.. 1000 3162,2 10000 ꝛc.

Logar. 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{8}{2}$ ꝛc.

oder 0 $\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$ 3 $3\frac{1}{2}$ 4 ꝛc.

Weil nemlich in der Progression von dem ersten Gliede bis z. B. zu dem Gliede 31,622 drey Verhältnisse, deren jede halb so hoch, als die einfache Verhältniß 1 : 10 ist, also gleichsam drey halbe Verhältnisse enthalten sind, so ist $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$ der Logarithme der Zahl 31,622.

(2) Geometr.

Progr. 1 1,7783.. 3,1622.. 5,6233.. 10 17,783.. 31,622.. 56,233 100 ꝛc.

Logar. 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{8}{4}$ ꝛc.

oder 0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1 $1\frac{1}{4}$ $1\frac{2}{4}$ $1\frac{3}{4}$ 2 ꝛc.

Weil hier von dem ersten Gliede bis z. B. zu dem Gliede 17,783.. fünf Verhältnisse gezählt werden, deren jedes $\frac{1}{4}$ der einfachen Verhältniß 1 : 10 ist; so ist $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$ der Logarithme der Zahl 17,783. Um dieses, und die daraus herzuleitenden Folgerungen, vollständiger zu übersehen, dienen die hier folgenden Tafeln.

Erste

I.	Log.	IV.	Log.	
1	0	1	0	
		1,3335..	0 1/8	5
		1,7783..	0 1/4	
		2,3713..	0 3/8	75
		3,1622..	0 1/2	
		4,2169..	0 5/8	25
		5,6233..	0 3/4	
		7,4988..	0 7/8	75
10	1	10	1	
		13,335..	1 1/8	25
		17,783..	1 1/4	5
		23,713..	1 3/8	75
		31,622..	1 1/2	
		42,169..	1 5/8	625
		56,233..	1 3/4	75
		74,988..	1 7/8	875
100	2	100	2	
		133,35..	2 1/8	125
		177,83..	2 1/4	25
		237,13..	2 3/8	375
		316,22..	2 1/2	5
		421,69..	2 5/8	625
		562,33..	2 3/4	75
		749,88..	2 7/8	875
1000	3	1000	3	
		1333,5..	3 1/8	,125
		1778,3..	3 1/4	,25
		2371,3..	3 3/8	,375
		3162,2..	3 1/2	,5
		4216,9..	3 5/8	,625
		5623,3..	3 3/4	,75
		7498,8..	3 7/8	,875
10000	4	10000	4	
		13335,..	4 1/8	4,125
		17783,..	4 1/4	4,25
		23713,..	4 3/8	4,375
		31622,..	4 1/2	4,5
		42169,..	4 5/8	4,625
		56233,..	4 3/4	4,75
		74988,..	4 7/8	4,875
100000	5	100000	5	5
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

UNIV. OF MICH.

Zur Erläuterung dieſer Tafeln dient folgendes. Beyde beſtehen aus 4 Columnen, deren jede in 2 kleinere geſpalten iſt. Jede erſte dieſer kleineren Columnen enhält die Glieder einer geometriſchen Progreſſion, und die zwote, die denſelben zugehörigen Logarithmen. Die geometriſchen Progreſſionen ſind mit I. II. III. IV. bezeichnet, und einerley mit denen in der obigen 9ten Anmerk. eben ſo bezeichneten Progreſſionen. Die zweyte Tafel iſt von der erſten nur dadurch unterſchieden, daß in derſelben die gemeinen Brüche der erſten Tafel durch Decimalbrüche ausgedruckt ſind. Die Logarithmen ſind in der erſten Tafel ſo ausgedruckt, daß die uneigentlichen Brüche in eigentliche verwandelt, und dieſe, wo es geſchehen konnte, aufgehoben ſind. Z. B. In der vierten Columne ſteht

$$1\quad 1\tfrac{1}{8}\quad 1\tfrac{1}{4}\quad 1\tfrac{3}{8}\quad 1\tfrac{1}{2}\quad 1\tfrac{5}{8}\quad 1\tfrac{3}{4}\quad 1\tfrac{7}{8}\quad 2\ \text{ꝛc.}$$

anſtatt

$$\tfrac{8}{8}\quad \tfrac{9}{8}\quad \tfrac{10}{8}\quad \tfrac{11}{8}\quad \tfrac{12}{8}\quad \tfrac{13}{8}\quad \tfrac{14}{8}\quad \tfrac{15}{8}\quad \tfrac{16}{8}\ \text{ꝛc.}$$

12) Auch bey dieſen Ausdrücken iſt nemlich der Begriff der Logarithmen unmittelbar anzuwenden, welches folgendes Beyſpiel deutlich machen wird. Der Logarithme von 421,69 iſt in der vierten Columne der erſten Tafel $2\frac{3}{8}$; d. i. die Progreſſion enthält von dem erſten Gliede bis zu dem Gliede 421,69 zwo einfache oder ganze Verhältniſſe, 1 : 10 und 10 : 100, deren jedes der einfachen Verhältniß 1 : 10 gleich iſt, und auſſerdem noch 5 Verhältniſſe, welche Theile der dritten Verhältniß 100 : 1000 ſind, und deren jede $\frac{1}{8}$ ſo hoch, als dieſe, oder überhaupt, als die einfache Verhältniß, iſt. In der zweyten Tafel iſt dieſer Logarithme durch 2,625 ausgedruckt. Der Bruch, welcher 625 Tauſendtel bedeutet, will ſo viel ſagen: Wenn die vierte Verhältniß 100 : 1000 in tauſend gleiche Verhältniſſe getheilt würde, ſo würden in der dadurch entſtehenden Progreſſion, von dem Gliede 100 bis auf das Glied 421,69 in derſelben, 625 ſolcher gleichen Verhältniſſe gezählt werden. Jede dieſer Verhältniſſe wäre ſodann $\frac{1}{1000}$ ſo hoch, als die einfache Verhältniß. Die Mathematik lehrt nemlich auch, wie ein jedes Verhältniß überhaupt in eine jede Anzahl gleicher Verhältniſſe getheilt werden könne.

13) Wenn die Reihen der Logarithmen in beyden Tafeln der vorhergehenden Seite mit den oben (Fr. 38. 1. Anmerk. 2. S. 512.) gegebenen Tafeln verglichen werden; ſo erhellt, daß ſie mit denen dort durch Einſchaltung auseinander hergeleiteten arithmetiſchen Progreſſionen völlig übereinſtimmen. Die Reihe der Logarithmen der erſten geometriſchen Progreſſion iſt die dortige erſte arithmetiſche Progreſſion. Die Reihe der Logarithmen der zwoten geometriſchen Progreſſion iſt die dortige zwote arithmetiſche Progreſſion, u. ſ. w.

Wie demnach jede der geometrischen Progressionen aus der vorhergehenden durch geometrische Einschaltung entsteht, so entsteht die Reihe ihrer Logarithmen aus der vorhergehenden Reihe durch arithmetische Einschaltung. Jeder Logarithme in den obigen Tafeln ist demnach die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen dem nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Gliede, und überhaupt gelten die oben angeführten Eigenschaften der arithmetischen Progressionen auch von jeder Reihe der Logarithmen.

2) Ein jedes Glied einer geometrischen Progression ist ein Product aus dem ersten Gliede in diejenige Potenz des Exponenten derselben, deren Zahl anzeigt, das wievielte Glied das gegebene nach dem ersten Gliede ist.

Z. B. Das sechste Glied ist das fünfte nach dem ersten; daher ist dasselbe ein Product aus dem ersten Gliede in die fünfte Potenz des Exponenten. In der Progression

8 32 128 512 2048 8192

ist der Exponent 4, die fünfte Potenz desselben oder das Product $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ist 1024, das Product aus 8 in 1024 ist 8192, welches der Progression sechstes Glied ist. In der Progression

1024 512 256 128 64 32

ist der Exponent $\frac{1}{2}$, die fünfte Potenz desselben ist $\frac{1^5}{2^5}$ oder $\frac{1}{32}$, das Product aus 1024 in $\frac{1}{32}$ ist 32, welches das sechste Glied ist.

Anmerk. 1) Weil nemlich jedes Glied der Progression aus dem vorhergehenden durch die Multiplication desselben mit dem Exponenten entsteht; so ist, wenn z. B. das erste Glied 8 und der Exponent 4 ist,

das zweyte Glied 8×4 d. i. 8×4^1,

folglich das dritte Glied $8 \times 4 \times 4$ d. i. 8×4^2,

folglich das vierte Glied $8 \times 4 \times 4 \times 4$ d. i. 8×4^3,

folglich das fünfte Glied $8 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ d. i. 8×4^4 u. s. w.

Es ist aber das zweyte Glied um eine, das dritte Glied um zwey, das vierte um drey ꝛc. Stellen vom ersten Gliede entfernt.

2) Hier-

2). Hieraus erhellt zugleich die Regel, wie das letzte Glied einer geometrischen Progression gefunden werde, wenn das erste Glied, der Exponent, und die Zahl aller Glieder den Progression gegeben sind. Z. B. Es sey die Progression folgende: 32 16 8 4 2c. wo das erste Glied 32, und der Exponent $\frac{1}{2}$ ist, die Anzahl aller Glieder sey 11: so wird das letzte Glied gefunden, indem 32 mit der zehnten Potenz von $\frac{1}{2}$ d. i. mit $\frac{1}{1024}$ multiplicirt wird. Das Product $\frac{32}{1024}$ oder $\frac{1}{32}$ ist das gesuchte Glied. Die ganze Progression ist nemlich folgende:

$$32\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\ \tfrac{1}{16}\ \tfrac{1}{32}$$

3) Die geometrische Verhältniß jeder zweyer Glieder einer geometrischen Progression ist der geometrischen Verhältniß jeder zweyer andern Glieder derselben gleich, welche um eben so viele Stellen als jene, von einander entfernt sind.

Z. B. Das vierte Glied verhält sich zum siebenten, welches das dritte nach ihm ist, wie jedes andere Glied zu dem dritten nach ihm, z. B. wie das zweyte zum fünften. Das sechste Glied verhält sich zum zweyten, welches das vierte vor ihm ist, wie jedes andere Glied zu dem vierten vor ihm, z. B. wie das siebente zum dritten. In der Progression

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024

ist $8 : 64 = 2 : 16$ und $32 : 2 = 64 : 4$ u. s. w.

Anmerk. 1) Bey gleichen Entfernungen der Glieder von einander müssen nemlich die Exponenten ihrer Verhältnisse zu einander gleich seyn, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man überlegt, wie jedes Glied aus dem vorhergehenden gefunden werde. In der obigen Progression, deren Exponent 2 ist, ist z. B.

das vierte Glied 8

folglich das fünfte, d. i. das erste nach dem vierten 8×2^1

das sechste, d. i. das zweyte nach dem vierten 8×2^2

das siebente, d. i. das dritte nach dem vierten 8×2^3

Eben so folgt, daß, da das zweyte Glied 2 ist, das fünfte Glied, d. i. das dritte nach ihm 2×2^3 seyn müsse. Offenbar ist aber $8 : 8 \times 2^3 = 2 : 2 \times 2^3$, denn die Exponenten dieser Verhältnisse sind gleich. Jeder ist 2^3, d. i. die dritte, oder überhaupt diejenige Potenz des Exponenten

ponenten der Progression, deren Zahl anzeigt, um wieviel Stellen der Progression die Glieder der Verhältniß von einander entfernt sind. Diese Schlüsse gelten bey allen andern gleich weit von einander entfernten Gliedern, und es ist

also auch z. B. $2 : 32 = 4 : 64$

folglich auch $3 : 2 = 64 : 4$.

2) Wenn umgekehrt vier Glieder einer geometrischen Progression in einer geometrischen Proportion stehn; so muß das vierte dieser Glieder von dem dritten um eben so viel Stellen, als das zweyte von dem ersten entfernt seyn. Z. B. Weil die vier Glieder der obigen Progression 4 64 16 256 in einer geometrischen Proportion stehn, indem $4 : 64 = 16 : 256$, und 64 das vierte Glied nach dem Gliede 4, folglich der Exponent der Verhältniß $4 : 64$ die vierte Potenz von 2 ist; so muß auch 256 das vierte Glied nach dem Gliede 16 seyn. Denn da die Verhältniß $16 : 256$ der Verhältniß $4 : 64$ gleich ist, so muß der Exponent derselben gleichfalls 2^4, folglich $256 = 16 \times 2^4$ seyn; es kann aber kein anderes Glied in derselben Progression 16×2^4 seyn, als dasjenige, welches das vierte nach dem Gliede 16 ist.

4) Das Product jeder zwey Glieder einer geometrischen Progression, welche von den beyden äußersten gleichweit entfernt sind, ist dem Product der äußersten Glieder gleich, und wenn die Progression ein mittelstes Glied hat; so ist dessen Quadrat diesem Producte gleich. Z. B. Wenn die Progression 8 Glieder hat, und folgende ist:

1 2 4 8 16 32 64 128

so ist das Product des ersten und achten Gliedes $1 \times 128 = 128$

des zweyten und siebenten $2 \times 64 = 128$

des dritten und sechsten $4 \times 32 = 128$

des vierten und fünften $8 \times 16 = 128$

Wenn die Progression fünf Glieder, folglich ein mittelstes hat, und folgende ist

1 2 4 8 16

so ist das Product des ersten und fünften Gliedes $1 \times 16 = 16$

des zweyten und vierten $2 \times 8 = 16$

das Quadrat des dritten Gliedes $4^2 = 16$

Anmerk.

Anmerk. Nach der vorhin angeführten dritten Eigenschaft der geometrischen Progression entstehn nemlich folgende Proportionen bey der obigen ersten Progression:

1 : 2 = 64 : 128

1 : 4 = 32 : 128

1 : 8 = 16 : 128

und bey der zweyten Progression

1 : 2 = 8 : 16

1 : 4 = 4 : 16

In diesen Proportionen ist aber das Product der mittleren Glieder dem Product der äußern Glieder gleich, und diese sind für jede Progression durchgängig eben dieselben.

5) Die **Summe aller Glieder** einer geometrischen Progression wird folgendergestalt gefunden: Es wird zuvörderst das letzte Glied der Progression mit dem Exponenten derselben multiplicirt. Wenn nun die Progression **steigend** ist, so wird von diesem Product das erste Glied abgezogen, und der Rest durch den um 1 verminderten Exponenten dividirt. Wenn aber die Progression **fallend** ist; so wird das gefundene Product von dem ersten Gliede abgezogen, und der Rest durch den Bruch dividirt, welcher herauskommt, wenn der Exponent von 1 subtrahirt wird. Der Quotient, welcher in beyden Fällen gefunden wird, ist die Summe aller Glieder der Progression.

Z. B. Es sey die Summe aller Glieder folgender Progression, deren Exponent 3 ist, zu finden:

7 21 63 189 567 1701 5103 15309 45927

so wird zuvörderst das letzte Glied 45927 mit 3 multiplicirt, und von dem Product 137781 das erste Glied 7 abgezogen, weil die Progression steigend ist. Der Rest 137774 wird hierauf mit 3 — 1 d. i. mit 2 dividirt; der Quotient 68887 ist die Summe aller Glieder.

Es

Es sey ferner die Summe aller Glieder folgender Progression, deren Exponent $\frac{1}{2}$ ist, zu finden:

$$64\ 32\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{8}\ \tfrac{1}{16}\ \tfrac{1}{32}\ \tfrac{1}{64}\ \tfrac{1}{128}$$

so wird zuvörderst das letzte Glied $\frac{1}{128}$ mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt, und das Product $\frac{1}{256}$ von dem ersten Gliede 64 abgezogen, weil die Progression fallend ist. Der Rest ist $63\frac{255}{256}$ oder, wenn dieser gemischte Bruch eingerichtet wird, $\frac{16}{2}\frac{38}{6}3$. Hierauf wird der Exponent $\frac{1}{2}$ von 1 abgezogen, und mit dem Rest $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{38}{6}3$ dividirt. Der Quotient $3\frac{2}{2}\frac{7}{5}\frac{66}{6}$ oder $127\frac{1}{1}\frac{2}{2}\frac{7}{8}$ ist die Summe aller Glieder.

Die Rechnung mit Logarithmen.

41. Was sind logarithmische Tafeln?

Eine Sammlung von Logarithmen der ganzen Zahlen.

Anmerk. 1) Es wird in der Mathematik überhaupt unter Tafeln eine jede Sammlung von Zahlen verstanden, durch deren Hülfe Rechnungen abgekürzt und erleichtert werden können. Eine dergleichen Tafel ist schon die Tafel des Einmaleins (S. 113) und die Tafel der Vielfachen (S. 121). Die logarithmischen Tafeln verschaffen eine solche Erleichterung der Rechnung im vorzüglichen Grade. Die logarithmischen Tafeln der Reihe der natürlichen Zahlen enthalten die ununterbrochene Reihe aller Briggischen Logarithmen der ganzen Zahlen, und zwar in kleineren Sammlungen von 1 bis 10000, in größeren von 1 bis 20000, und in den vollständigen von 1 bis 102100 C. F. von Wolfs zu Halle unter dem Titel: Zu der Trigonometrie und Ausziehung der Wurzeln nöthige Tafeln ꝛc. enthalten die Logarithmen von 1 bis 10000. Sie sind nicht allein für Anfänger hinlänglich, um eine Kenntniß des Gebrauchs solcher Tafeln, und eine Fertigkeit in der Rechnung nach denselben zu erhalten, sondern man bedarf auch in der Ausübung in sehr vielen Fällen keiner größern Tafeln. Daher soll zuvörderst die Einrichtung dieser Wolfischen Tafeln hier kürzlich angezeigt, und in der Folge die Rechnung nach denselben gemacht werden.

2) Es besteht dieses Buch aus 4 Abschnitten. Die Ueberschriften derselben sind: 1) Canon triangulorum, continens logarithmos sinuum et tangentium ad singula minuta prima. 2) H. Briggii tabula logarithmorum pro numeris naturali-

serie

serie crescentibus. III) Tabula numerorum quadratorum et cubicorum ab 1 usque ad 1000. IV) Canon triangulorum, continens sinus et tangentes ad singula minuta prima. Die Seitenzahlen des Buchs sind unten, der Stelle des Custos gegenüber, gesetzt. Unter diesen vier Abschnitten enthält nur der erste und zweyte Logarithmen. Der dritte eine Sammlung der Quadrat- und Cubikzahlen, welche zur Erleichterung der Ausziehung der Wurzeln dient. Die Einrichtung des ersten und vierten Abschnitts wird in der Trigonometrie gezeigt werden. Der zweyte Abschnitt, welcher nach der Seite, die unten mit Nr. 90 bezeichnet ist, seinen Anfang nimmt, enthält von der mit Nr. 93 bis zu der mit Nr. 192 bezeichneten Seite die Briggischen Logarithmen der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10000. Jede Seite dieses Abschnitts ist in drey Columnen gespalten, in deren jeder unter der Ueberschrift N. die ganzen Zahlen so, wie sie in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, und unter der Ueberschrift Logarith. neben jeder Zahl der ihr zugehörige Logarithme steht. Z. B. auf der Seite Nr. 93 ist der Anfang jeder der drey Columnen, aus welchen zugleich mehrere Logarithmen bey den in der Folge vorkommenden Rechnungsbeyspielen genommen sind, folgender:

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771212	36	2.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5910646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136

Auf jeder Blattseite stehen die Logarithmen von 100 zu nächst auf einander folgenden Zahlen, und die letzten Logarithmen der beyden ersten Columnen sind daher wiederum die ersten in den nächstfolgenden zweyten und dritten Columnen. Oben in der Stelle der Seitenzahl steht auf jeder Blatt-

Blattseite zur leichteren Uebersicht der Seite diejenige Zahl, auf welche die auf derselben Seite stehende Zahlen mit ihren Logarithmen folgen.

2) Es ist zur deutlichen Einsicht in die logarithmischen Rechnungen vortheilhaft, sich die Art, wie diese und auch jede vollständigere Sammlung von Logarithmen entstanden sey, folgendergestalt vorzustellen. Es ist sowol die geometrische Progression

1 10 100 1000 10000 100000 1000000

als auch die ihr zugehörige arithmetische

0 1 2 3 4 5 6

durch fortgesetzte Wiederholung der Einschaltung, wovon im Vorhergehenden (S. 328 Tafel 1 u. 2) der Anfang der Rechnung vorgestellt ist, erweitert, und diese Rechnung bey beyden Progressionen so weit fortgesetzt worden, bis eine letzte geometrische Progression, in welcher, ausser vielen irrationalen Gliedern, auch alle ganze Zahlen, welche zwischen 1 und 102100 fallen, als Glieder derselben vorkommen, und mit derselben auch eine letzte arithmetische Progression, welche, ausser vielen andern, auch die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 102100 enthält, entstanden ist. Aus dieser letzten geometrischen Progression sind blos diejenigen Glieder, welche ganze Zahlen sind, und aus der letzten arithmetischen Progression blos diejenigen Glieder, welche die Logarithmen der ganzen Zahlen sind, ausgehoben, und in den logarithmischen Tafeln aufgenommen worden. Ohnerachtet also die letzte Progression, z. B. zwischen 1 und 10 genau eben so viele Glieder als zwischen 10 und 100, oder 100 und 1000 u. s. w. hat; so sind doch von sämmtlichen zwischen 1 und 10 fallenden Gliedern derselben nur 8, von den zwischen 10 und 100 fallenden Gliedern nur 89 ꝛc. Glieder beybehalten worden, weil zwischen 1 und 10 nur 8 und zwischen 10 und 100 nur 89 ganze Zahlen fallen. Das ähnliche gilt von den aus der letzten arithmetischen Progression beybehaltenen Logarithmen.

4) Hieraus, und aus der oben (S. 328 Tafel 1 u. 2) gegebenen Vorstellung des Anfangs der Rechnung erhellet, daß jeder Logarithme der Tafeln das eben so vielte Glied der letzten arithmetischen Progression ist, das so vielte Glied der letzten geometrischen Progression die Zahl ist, zu welcher der Logarithme gehört, und daß jede zween Logarithmen in der letzten arithmetischen Progression um eben so viele Stellen von einander entfernt sind, um so viele Stellen die Zahlen, zu welchen sie gehören, in der letzten geometrischen Progression von einander entfernt sind. Wäre z. B. die Zahl 69 das

tausend-

tausendste Glied der letzten geometrischen Progression, so wäre ihr Logarithme 1,8388491 das tausendste Glied der letzten arithmetischen Reihe, und wäre in der letzten geometrischen Progression die Zahl 69 um 100 Stellen von der Zahl 67 entfernt, so wäre auch in der letzten arithmetischen Reihe der Logarithme der Zahl 69 von dem Logarithmen der Zahl 67 gleichfalls um 100 Stellen entfernt.

5) Die Logarithmen der Glieder der Hauptprogression 1 10 100 1000 u. s. w. sind 0 1 2 3 u. s. w. folglich ganze Zahlen. Alle übrigen Logarithmen sind entweder blos Decimalbrüche, oder sie bestehen aus einer ganzen Zahl und aus Decimalbrüchen. In den logarithmischen Tafeln sind diese Decimalbrüche gewöhnlich nur bis auf 7 Stellen, d. i. bis auf Zehnmillionentheile angegeben, und die niedrigeren weggelassen, auch ist in denselben zur Bezeichnung der Stelle der Einer ein Punct, anstatt des sonst gewöhnlichen Comma, gesetzt worden. Die Zahl der ganzen Einheiten, welche der Logarithme enthält, wird die Kennziffer (nota characteristica) desselben genannt. So ist z. B. 1 die Kennziffer des Logarithmen der Zahl 67, und die Kennziffer des Logarithmen der Zahl 3 ist 0.

6) Das Zeichen, dessen man sich in der Mathematik bedient, um den Logarithmen einer Zahl anzuzeigen, ist der [illegible]stabe l; welcher vor der Zahl gesetzt wird. So bedeutet z. B. l 2. den Logarithmen von 2; 2 + l 3 die Summe der Logarithmen von 2 und 3; 3^2 den Logarithmen des Quadrats von 3; 2 l 3 das doppelte des Logarithmen der Zahl 3; $l \sqrt{61}$ den Logarithmen der Quadratwurzel aus 61; $\frac{1}{2} l 61$ die Hälfte des Logarithmen von 61 u. s. w.

42. Welches sind die vornehmsten Eigenschaften der Logarithmen?

a) Ueberhaupt kommen denselben alle Eigenschaften der Glieder arithmetischer Progressionen, in so fern von denselben auf die Logarithmen die Anwendung gemacht werden kann, zu.

Anmerk. Den Briggischen Logarithmen kommen ausserdem auch die besondern Eigenschaften der Glieder derjenigen arithmetischen Reihe zu, aus welcher sie entstanden sind.

b) Insonderheit sind folgende Eigenschaften zu merken:

1) Die Größe der Logarithmen nimmt mit der Größe der Zahlen zu; eine größere Zahl hat einen größeren Logarithmen, als eine kleinere.

Anmerk. 1) Die Logarithmen sind nemlich Glieder einer steigenden arithmetischen, und die Zahlen, zu welchem sie gehören, sind Glieder einer steigenden geometrischen Reihe.

2) Es ist daher leicht, sich eine Fertigkeit zu verschaffen, sowol den Logarithmen einer gegebenen ganzen Zahl zwischen 1 und 10000, als die zu einem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl in den Tafeln aufzusuchen, wenn er darin befindlich ist. Z. B. Um die Zahl zu finden, welche dem Logarithmen 3,8387232 zugehört, sucht man zuvörderst die Logarithmen auf, deren Kennziffer 3 ist (Wolfs Taf. N. 102); unter diesen sucht man wieder diejenigen auf, wo in der Stelle der Zehntel 8 steht (W. T. N. 156), unter diesen ferner diejenigen, wo in der Stelle der Hundertel 3 steht (N. 160), unter diesen wieder die, wo in der Stelle der Tausendtel 8 steht (N. 161) u. s. w. da sich denn leichd findet, daß der gegebene Logarithme zu der Zahl 6898 gehört.

3) Der Logarithme eines uneigentlichen oder eines gemischten Bruchs muß größer seyn, als der Logarithme der ganzen Zahl, welche in diesem Bruch enthalten ist, und kleiner, als die um 1 größere Zahl; und umgekehrt muß ein Logarithme, der nicht in den Tafeln steht, aber zwischen zween zunächst auf einander folgende Logarithmen der Tafeln fällt, zu einer Zahl gehören, welche zwischen die beyden Zahlen fällt, zu welchen die beyden Logarithmen gehören. Z. B. $13\frac{1}{4}$ oder 13,25 muß größer seyn als 13, und kleiner als 14. Der Logarithme 1,8732456 ist größer als 1,8692317, welches der Logarithme von 74, und kleiner als der nächstfolgende 1,8750613, welcher der Logarithme von 75 ist; die ihm zugehörige Zahl muß demnach größer als 74 und kleiner als 75, d. i. ein gemischter Bruch seyn. Wie eine solche Zahl gefunden werde, wird im folgenden gezeigt werden.

4) Die Kennziffer eines jeden Logarithmen besteht aus so viel Einheiten, als diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel Stellen die höchste Ziffer der Zahl, zu welchen der Logarithme gehört, von der Stelle der Einer entfernt ist. Z. B. Von den Logarithmen folgender Zahlen

6	35	967	9648	56465	
müssen	0	1	2	3	4

die Kennziffern seyn; denn 6 fällt zwischen 1 und 10; 35 zwischen 10 und 100; 967 zwischen 100 und 1000, u. s. w. folglich muß 6 größer als 0 und kleiner als 1; 1,35 muß größer als 1 und kleiner als 2 seyn, u. s. w. Es ist über 6 um keine; die höchste Ziffer 3 der Zahl 35 ist um eine; die höchste Ziffer 9 der Zahl 967 ist um 2 ꝛc. Stellen von der Stelle der Einer entfernt. Die Kennziffern folgender Zahlen

9646,5	964,65	96,465	9,6465
müssen seyn	3	2	1	0

3) Aus der Kennziffer eines gegebenen Logarithmen kann daher der Werth der Ziffern der ihm zugehörigen Zahl leicht bestimmt werden. Z. B. Wenn die Ziffern der Zahl, zu welcher der Logarithme 2,7199938 gehört, nach der Ordnung folgende sind: 5248; so folgt aus der Kennziffer 2, daß die höchste Ziffer dieser Zahl um 2 Stellen von der Stelle der Einer entfernt seyn müsse; folglich ist

2,7199938 = 1 524,8.

2) Wenn vier Zahlen in einer geometrischen Proportion stehn, so stehn ihre Logarithmen in derselben Folge in einer arithmetischen Proportion.

Z. B. Es ist 4 : 8 = 36 : 72

daher ist auch 1.4 — 18 = 136 — 172

oder 0,6020600 — 0,9030900 = 1,5563025 — 1,8573325.

Anmerk. 1) Weil die Zahlen 4 8 36 72 in Proportion stehn, und sie Glieder einer geometrischen Progression sind, so ist in derselben (nach Fr. 40. 3) Anmerk. 2)) 8 von 4 um so viel Stellen entfernt, als 72 von 36. Die Logarithmen dieser Zahlen sind Glieder einer arithmetischen Progression, und es ist in derselben (nach Fr. 41. Anmerk. 4.) 18 von 14 um eben so viel Stellen entfernt, als 172 von 136. Hieraus folgt (nach Fr. 38. 3) die hier angezeigte Eigenschaft der Logarithmen. Aus derselben können alle folgenden hergeleitet werden, und sie ist daher von vorzüglicher Wichtigkeit.

4) Daher wird zu drey gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl, ohne unmittelbare Berechnung derselben, aus den logarithmischen Tafeln gefunden, wenn zu den Logarithmen der drey gegebenen Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl gesucht wird. Diese ist der Logarithme der gesuchten geometrischen, die daher bekannt wird, wenn dieser Logarithme in den Tafeln

vorkommt. Z. B. Es sey in folgender geometrischen Proportion

462 : 693 = 1848 : vierte Pr. Z.

das letzte Glied zu finden, so ist, weil

l 462 — l 693 = l 1848 — Log. der viert. P. Z.

die Rechnung folgende:

I. l 462 = 2,6646420
II. l 693 = 2,8407332
III. l 1848 = 3,2667020

IV. l 1848 + l 693 = 6,1074352

V. (l 1848 + l 693) — l 462 = 3,4427982 = l 2772.

Hier sind zuvörderst die Logarithmen der drey gegebenen Zahlen aus den Tafeln genommen, und in den Zeilen I. II. III. in ihrer Ordnung, wie bey diesen Rechnungen gewöhnlich geschieht, unter einander gesetzt worden. Hierauf ist zu diesen dreyen Logarithmen die vierte arithmetische Proportionalzahl dadurch gefunden worden, daß von der Summe des zweyten und dritten Logarithmen, welche in der Zeile IV. steht, der erste abgezogen ist. Der Rest in der Zeile V. ist der Logarithme der gesuchten Zahl. Dieser ist in den Tafeln aufgesucht worden, und weil sich findet, daß er zu der Zahl 2772 gehört, so folgt, daß diese Zahl die gesuchte vierte Proportionalzahl zu den drey gegebenen sey.

Beyspiele zur Uebung. 1) Es sey zu den Zahlen 2808; 4212; 5568 die vierte Proportionalzahl zu finden; so giebt die Rechnung den Logarithmen 3,9217905, welcher zu der Zahl 8352 gehört, diese ist demnach die gesuchte Zahl.

2) Es sey zu den Zahlen 4,2169; 749,88; 31,622 die vierte Proportionalzahl zu finden. Die Logarithmen dieser Zahlen stehn in der obigen Tafel (S. 318, Tafel 2.), und die Rechnung ist folgende:

I. l 4,2169 = 0,625
II. l 749,88 = 2,875
III. l 31,622 = 1,5

II + III = 4,375

II + III — I = 3,75 = l 5623,8

3) Der Logarithme eines Products ist der Summe der Logarithmen der Factoren gleich.

Z. B.

Z. B. Weil $35 = 5 \times 7$, so ist $l\,35 = l\,5 + l\,7$; weil $105 = 5 \times 7 \times 3$, so ist $l\,105 = l\,5 + l\,7 + l\,3$ u. s. w.

Anmerk. 1) Es ist nemlich jedes Product die vierte Proportionalzahl zu 1 und den Factoren. Z. B. Es ist

$1 : 5 = 7 : 35$; und $1 : 5 \times 7 = 3 : 105$ u. s. f. folglich ist

$$l\,(5 \times 7) = l\,5 + l\,7 - l\,1$$

und $l\,105 = l\,(5 \times 7) + l\,3 - l\,1$

oder $l\,105 = (l\,5 + l\,7 - l\,1) + l\,3 - l\,1$

die Schlüsse gelten für jede größere Anzahl von Factoren. Es ist aber $l\,1 = 0$, daher in diesen Ausdrücken der Zusatz $- l\,1$, so oft er vorkommt, weggelassen werden kann.

2) Wenn eine Zahl, deren Logarithme nicht in den Tafeln steht, ein Product von Factoren ist, deren Logarithmen sämmtlich in den Tafeln stehn, so kann ihr Logarithme durch die Addition dieser Logarithmen leicht gefunden werden. Z. B. Es ist $9316104 = 9644 \times 966$; folglich $l\,9316104 = l\,9644 + l\,966$; und es wird derselbe 6,9692343 gefunden. Ferner ist $19312 = 8 \times 34 \times 71$; hieraus wird $l\,19312 = 4,2858272$ gefunden u. s. f.

3) Wenn zu dem Logarithmen einer gegebenen Zahl die ganzen Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. addirt werden, so sind die Summen die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche zehn- hundert- tausendmal u. s. w. größer sind, als die Zahl des gegebenen Logarithmen. Z. B. Es ist

$l\,7 = 0,8450980$

$l\,70 = 1,8450980$

$l\,700 = 2,8450980$

$l\,70000 = 4,8450980$

u. s. w.

Es ist nemlich $70 = 7 \times 10$ daher $l\,70 = l\,7 + l\,10$, u. $l\,10 = 1$

$700 = 7 \times 100$ $l\,700 = l\,7 + l\,100$ $l\,100 = 2$

4) Der Logarithme eines Quotienten ist der Differenz gleich, welche entsteht, wenn der Logarithme des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus abgezogen wird.

Z. B. Weil $37 = 74 : 2$ ist; so ist auch $l\,37 = l\,74 - l\,2$.

Anmerk. 1) Weil der Dividendus ein Product ist, dessen Factoren der Divisor und Quotiente sind, so ist nach dem vorhergehenden,

$$1 : 2 = 37 : 74$$

folglich auch $2 : 1 = 74 : 37$

woraus folgt, daß $l\,37 = l\,74 + l\,1 - l\,2$; und weil $l\,1 = 0$ ist, folglich wiederum in diesem Ausdruck weggelassen werden kann, so ist

$$l\,37 = l\,74 - l\,2.$$

Eben diese Schlüsse gelten bey allen Quotienten und deren Logarithmen.

2) Wenn von dem Logarithmen einer gegebenen Zahl die ganzen Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. abgezogen werden, so sind die Differenzen die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche zehn-, hundert-, tausendmal u. s. w. kleiner sind, als die Zahl des gegebenen Logarithmen. Z. B. Es ist

$$l\,9643 = 3{,}9842122$$
$$l\,964{,}3 = 2{,}9842122$$
$$l\,96{,}43 = 1{,}9842122$$
$$l\,9{,}643 = 0{,}9842122$$

Es ist nemlich $964{,}3 = \frac{9643}{10}$, daher $l\frac{9643}{10} = l\,9643 - l\,10$, und $l\,10 = 1$, u. s. w.

3) Den Logarithmen des Bruchs 0,9643 zu bestimmen, müßte daher, weil dieser Bruch zehnmal kleiner als 9,643 ist, die Kennziffer des Logarithmen dieser Zahl um 1 vermindert werden. Da diese 0 ist; so wird die nöthige Verminderung der Kennziffer blos folgendergestalt durch -1 angezeigt.

$$l\,0{,}9643 = 0{,}9842122 - 1$$

Eben so ist $l\,0{,}09643 = 0{,}9842122 - 2$

Die abzuziehende Zahl hat das oben (Fr. 42. b) 1) Anm. 4) angezeigte Kennzeichen der Kennziffer. Z. B. In 0,09643 ist die höchste Ziffer um 2 Stellen von der Stelle der Einer entfernt, und es ist auch die Zahl 2 abzuziehn.

4) Der Logarithme einer jeden Potenz einer gegebenen Zahl ist dasjenige Vielfache des Logarithmen der

der Wurzel, deſſen Zahl dem Exponenten der Potenz gleich iſt.

Z. B. Der Logarithme des Quadrats, d. i. der zwoten Potenz einer Zahl iſt das zweyfache; der Logarithme des Würfels, d. i. der dritten Potenz derſelben, iſt das dreyfache des Logarithmen der Zahl, u. ſ. w. Weil

$$l2 = 0{,}3010300$$

ſo iſt $l2^2 = 2\,l2 = 0{,}6020600 = l\,4$

$l2^3 = 3\,l2 = 0{,}9030900 = l\,8$

$l2^4 = 4\,l2 = 1{,}2041200 = l16$

u. ſ. w.

Anmerk. Weil nemlich Potenzen Producte aus gleichen Factoren ſind, ſo werden ihre Logarithmen durch wiederholte Addition des Logarithmen der Wurzel, d. i. durch die Multiplication, gefunden.

6) Der Logarithme der Wurzel einer Potenz von jedem Grade iſt ein Quotient, welcher entſteht, wenn der Logarithme der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt wird.

Z. B. Der Logarithme der Quadratwurzel einer Zahl wird gefunden, wenn ihr Logarithme durch 2, der Logarithme ihrer Cubikwurzel, wenn ihr Logarithme durch 3 u. ſ. w. dividirt wird. Es iſt

$$l64 = 1{,}8061800$$

daher iſt $l\sqrt{64} = \frac{l64}{2} = 0{,}9030900 = l8$

$$l\sqrt[6]{64} = \frac{l64}{6} = 0{,}3010300 = l2$$

u. ſ. w.

Anmerk. 1) Weil die Logarithmen der Potenzen durch die Multiplication der Logarithmen der Wurzeln mit dem Exponenten der Potenz entſtehen; ſo müſſen umgekehrt die Logarithmen durch Wurzeln aus Logarithmen der Potenzen durch die Diviſion mit dem Exponenten gefunden werden.

2) Wegen der hier angeführten Eigenſchaften der Logarithmen können dieſe in ſehr vielen Fällen zur Verkürzung groſſer

Rechnungen dienen. Zur Wiederhölung des bisherigen Vortrages, und zugleich zum vorläufigen Beweise des Vortheils, den logarithmische Rechnungen geben, dient folgendes Beyspiel. Es sey die Berechnung des folgenden Quotienten zu machen:

$$\frac{\sqrt[13]{(256^{10} \bowtie 32^{9} \bowtie 262144)}}{\sqrt[9]{(64^{5} \bowtie 4096^{2} \bowtie 512)}}$$

so wird dieselbe durch Hülfe der Logarithmen leicht vollendet, indem folgende Rechnung gemacht wird:

$$\left(\frac{18\,l\,256 + 9\,l\,32 + l\,262144}{13}\right) - \left(\frac{5\,l\,64 + 2\,l\,4096 + l\,512}{9}\right)$$

Dieser Ausdruck zeigt nemlich die Differenz des Logarithmen des Dividendus von dem Logarithmen des Divisors, d. i. den Logarithmen des Quotienten an. Weil $262144 = 64 \bowtie 4096$ ist; so ist $l\,262144 = l\,64 + l\,4096$; folglich könnten sämtliche zu der Rechnung selbst erforderliche Logarithmen aus den Tafeln genommen werden. Die Rechnung selbst ist folgende:

I. $l\,256 = 2,4082400$ (10) $l\,32 = 1,5051500$ (9) $l\,4096 = 3,6123599$, $l\,64 = 1,8061800$

$10\,l\,256 = 24,082400$ $9\,l\,32 = 13,5463500$ $l\,262144 = 5,4185399$

$10\,l\,256 = 24,082400$
$9\,l\,32 = 13,5463500$
$l\,262144 = 5,4185399$

$10\,l\,256 + 9\,l\,32 + l\,262144 = 43,0472899$

13) $3,3113299$ Logar. des Dividendus.

II. $l\,64 = 1,8061800$ (5) $l\,4096 = 3,6123599$ (2) $l\,512 = 2,7092700$

$5\,l\,64 = 9,0309000$ $2\,l\,4096 = 7,2247198$

$5\,l\,64 = 9,0309000$
$2\,l\,4096 = 7,2247198$
$l\,512 = 2,7092700$

$5\,l\,64 + 2\,l\,4096 + l\,512 = 18,9648898$

9) $2,1072699$ Logar. d. Divisors.

III

Hr. 3,3113299 = Logar. des Dividendus.
— 2,1072099 = Logar. des Divisors.

1,2041200 = Logar. des Quotienten.

Dieser Logarithme ist, wie sich aus den Tafeln ergiebt, 16; folglich ist 16 der gesuchte Quotient.

3) Der Vortheil der Rechnung, welchen die Logarithmen verschaffen, wird dadurch noch ungleich erheblicher, daß aus den logarithmischen Tafeln durch eine leichte Rechnung sowol die Logarithmen sehr vieler anderer Zahlen, welche nicht in den Tafeln stehen, als auch die Zahlen, zu welchen in den Tafeln nicht befindliche Logarithmen gehören, gefunden werden können. Zur bessern Einsicht der Regeln dieser Rechnung ist vorläufig folgendes zu merken. Da die Logarithmen der Tafeln nur ausgehobene Glieder einer arithmetischen Progression, und zwar von ungleichen Entfernungen von einander sind; so kann zwar die ganze Reihe derselben keine vollständige arithmetische Progression ausmachen, indessen zeigt eine Vergleichung der Logarithmen der Tafeln unter einander, daß ganze Reihen auf einander folgender Logarithmen desto weniger von einer arithmetischen Progression abweichen, aus je mehreren Ziffern die Zahlen bestehen, zu welchen die Logarithmen gehören. Die folgende Tafel kann dies schon deutlich machen, ohgleich sie nur eine kurze Reihe auf einander folgender Logarithmen enthält.

Zahl.	Logarith.	Differ.	Zahl.	Logarith.	Differ.	Zahl.	Logarith.	Differ.
960	2, 9822712		9640	3, 9840770		96460	4, 9843473	
961	2, 9827234	4522	9641	3, 9841221	451	96461	4, 9843518	45
962	2, 9831751	4517	9642	3, 9841671	450	96462	4, 9843563	45
963	2, 9836263	4512	9643	3, 9842122	451	96463	4, 9843608	45
964	2, 9840770	4507	9644	3, 9842572	450	96464	4, 9843653	45
965	2, 9845273	4503	9645	3, 9843022	450	96465	4, 9843698	45
966	2, 9849771	4498	9646	3, 9843473	451	96466	4, 9843743	45
967	2, 9854265	4494	9647	3, 9843923	450	96467	4, 9843788	45
968	2, 9858753	4488	9648	3, 9844373	450	96468	4, 9843833	45
969	2, 9863238	4485	9649	3, 9844823	450	96469	4, 9843878	45
970	2, 9867717	4479	9650	3, 9845273	450	96470	4, 9843923	45

In dieser Tafel, welche aus drey Hauptcolumnen besteht, deren jede wieder dreyfach gespalten ist, stehn in der ersten Columne die Logarithmen von 960 bis 970, und neben ihnen in der dritten Spalte die Unterschiede derselben, welche Zehnmillionentheile bedeuten. So zeigt z. B. die erste Zahl 4528 an, daß der Ueberschuß des neben ihr stehenden Logarithmen (von 961) über den nächstvorhergehenden (von 960) 4528 Zehnmillionentheile betrage. In der zweyten und dritten Columne, welche letztere aus einer vollständigern Tafel genommen ist, stehen die Logarithmen größerer Zahlen, nebst ihren Unterschieden. Hier erhellt, daß eine Reihe auf einander folgender Logarithmen von Zahlen, die aus fünf Ziffern bestehn, eine arithmetische Progression ausmache, weil die Unterschiede gleich sind. Eine weitere Prüfung größerer Tafeln zeigt, daß eine solche Reihe Logarithmen von gleichen Unterschieden desto länger sey, je größer die höchsten Ziffern der ihnen zugehörigen Zahlen sind. So findet sich z. B. daß die Logarithmen aller ganzen Zahlen, welche zwischen 96000 und 97000 fallen, fast alle um 45, wenige nur um 46, und wenige andere um 44 Zehnmillionentheile von einander unterschieden sind, daher, zumal wenn die Genauigkeit nicht bis auf Zehnmillionentheile getrieben werden darf, diese ganze Reihe für eine arithmetische Progression angesehn werden kann. Eigentlich würde nemlich die Verschiedenheit der Unterschiede bey dergleichen Logarithmen sich nur erst bey den folgenden in der Tafel weggelassenen achten, neunten, zehnten ꝛc. Decimalstellen zeigen, dagegen sich diese Verschiedenheit bey den Logarithmen solcher Zahlen, die aus weniger Ziffern bestehen, schon in höhern Stellen, wie z. B. in der obigen ersten Columne schon in der Stelle der Hunderttausendtel, zeigt. Man nimmt daher bey den folgenden Rechnungen an, daß Reihen von Logarithmen für jede 10 oder 100 oder 1000 zunächst auf einander folgende Zahlen, die aus mehr als 4 Ziffern bestehn, ohne sonderlichen Fehler, für arithmetische Reihen angesehen werden können. Z. B. die Reihen der Logarithmen der Zahlen

von 27400 bis 27410

oder von 274000 bis 274100

oder von 2740000 bis 2741000

sind arithmethische Reihen. Und da die Decimalbrüche der Logarithmen solcher Zahlen, die durch einerley Ziffern, jedoch von verschiedenem Werthe ausgedruckt werden können, sämtlich gleich sind; so erhellt leicht, daß auch z. B. die Reihen der Logarithmen der Zahlen

274,00 274,01 274,02 274,03 274,04 u. s. w. bis 274,10
oder 274,000 274,001 274,002 274,003 276,004 u. s. w. bis 274,100
u. s. w.
als arithmetische Reihen angesehen werden können.

43. Wie wird zu einer gegebenen Zahl, welche nicht in den logarithmischen Tafeln befindlich ist, der ihr zugehörige Logarithme, durch Hülfe dieser Tafeln, gefunden?

Erster Fall. Wenn die gegebene Zahl eine ganze Zahl ist.

1) Wenn die gegebene Zahl zugleich so beschaffen ist, daß in den vor den vier höchsten Stellen derselben vorhergehenden niedrigeren Stellen blos Nullen befindlich sind: so wird in den Tafeln der Logarithme einer Zahl aufgesucht, welche aus 4 Ziffern besteht, die mit den vier höchsten Ziffern der gegebenen Zahl nach der Reihe einerley sind. Die Kennziffer dieses Logarithmen wird hierauf um so viel Einheiten vermehrt, so viel niedrigere Stellen vor den vier höchsten in der gegebenen Zahl vorhergehen. Der auf diese Art veränderte Logarithme ist der gesuchte.

Z. B. Es sey der Logarithme der Zahl 964600 zu finden. Da hier blos in den 4 höchsten Stellen Ziffern stehn, nemlich 9646; so wird zuvörderst l 9646 aus den Tafeln genommen. Er ist 3,9843473. Die Kennziffer desselben 3 wird hierauf um 2 vermehrt, weil in der Zahl 964600 vor den vier höchsten Stellen zwey Nullen vorhergehn. Daher ist l 964600 = 5,9843473.

2) Wenn in den vor den vier höchsten vorhergehenden niedrigeren Stellen der gegebenen Zahl auch geltende Ziffern stehn; so werden

(1) aus den Tafeln die Logarithmen derjenigen zwo zunächst auf einander folgenden Zahlen genommen

men, wovon die erste aus vier Ziffern besteht, die mit den vier höchsten Ziffern der gegebenen Zahl in derselben Ordnung einerley sind.

Z. B. Es seyn die Logarithmen folgender Zahlen zu finden:

I. 96463 II. 230075

so werden in den logarithmischen Tafeln wegen der Zahl I. die Logarithmen von 9646 und 9647, und wegen der Zahl II. die Logarithmen von 2300 und 2301 genommen.

I. 19646 = 3,9843473. II. 12300 = 3,3617278
19647 = 3,9843923 12301 = 3,3619166

(2) Beyde Logarithmen werden durch Veränderung der Kennziffer in die Logarithmen der zehn- oder hundert- oder tausendmal u. s. w. größeren Zahlen verwandelt, je nachdem die gegebene Zahl außer den vier höchsten Stellen noch eine, oder zwey oder drey u. s. w. Stellen mehr hat.

Die Zahl I. besteht aus 5, die Zahl II. aus 6 Ziffern; jene hat also eine, diese zwo Stellen mehr als vier. Die aus den Tafeln genommenen Logarithmen für die Zahl I. werden demnach in die Logarithmen der zehnmal, diejenigen für die Zahl II. in die Logarithmen der hundertmal größeren Zahlen verwandelt.

I. 196460 = 4,9843473 II. 1230000 = 5,3617278
196470 = 4,9843923 1230100 = 5,3619166

3) Diese also veränderten Logarithmen der Tafeln sind die Logarithmen zwoer Zahlen, zwischen welche die gegebene Zahl fällt, deren Logarithme folglich zwischen diese beyden Logarithmen fallen muß. Es wird daher hierauf der Unterschied der diesen Logarithmen zugehörigen Zahlen, ferner der Unterschied der kleineren dieser beyden Zahlen von der gegebenen, und endlich der Unterschied der Logarithmen selbst genommen,

und

und zu diesen dreyen Unterschieden in der Ordnung, in welcher sie hier genannt sind, die vierte geometrische Proportionalzahl gefunden. Diese ist der Unterschied des gesuchten Logarithmen von dem kleineren der beyden Logarithmen, zwischen welche derselbe fällt.

Hiernach ist die Rechnung für obige Zahlen folgende:

Für die Zahl I.

96470	96463	l 96470 = 4,9843923
96460	96460	l 96460 = 4,9843473

erster Unterschied 10 zweyter Unterschied 3 dritter Unterschied 0,0000450

10 : 3 = 0,0000450 : vierte Pr. Z.

3

0,0001350

10)

0,0000135 Unterschied des gesuchten Logar. von l 96460.

Für die Zahl II.

230100	230075	l 230100 = 5,3619168
230000	230000	l 230000 = 5,3617278

erster Unterschied 100 zweyter Unterschied 75 dritter Unterschied 0,0001888

100 : 75 = 0,0001888 : v. P. Z.

oder 4 : 3 = 0,0001888 : — —

oder 2 : 3 = 0,0000944 : — —

3

0,0002832

2)

0,0001416 Unterschied des gesuchten Logar. von l 230000.

4) Dieser gefundene Unterschied wird daher zu diesem kleineren Logarithmen addirt; die Summe ist der gesuchte Logarithme der gegebenen Zahl.

I. l 96460 = 4,9843473	II. l 230000 = 5,3617278
0,0000135	0,0001416
l 96463 = 4,9843608	l 230075 = 5,3618694

Anmerk.

Anmerk. Der Logarithme von 96463 steht so, wie er hier gefunden ist, in dem obigen kleinen Verzeichniß einiger Logarithmen und deren Differenzen. Die Berechnung des Logarithmen der Zahl 230075 ist völlig einerley mit der Berechnung des oben (Fr. 38 2. Anmerk. 4) gegebenen zweyten Beyspiels. Nach demjenigen nemlich, was im Vorhergehenden angemerkt ist, heißt den Logarithmen einer Zahl, die aus mehr als 4 Ziffern besteht, finden, so viel als ein Glied einer arithmetischen Progression zwischen den zwey äussersten Gliedern derselben finden, wenn dessen Entfernung vom ersten Gliede gegeben ist. Z. B. Für die Zahl 96463 ist die Frage auch folgende: Es soll zwischen folgenden äussersten Gliedern einer Progression,

(196460)(196461)(196462)(196463)(196464)(196465)(196466)(196467)
4,9843473 . . . . . .

(196468) (196469) (196470)
. . 4,9843923

wo das letzte Glied um 10 Stellen von dem ersten Gliede entfernt ist, das dritte nach dem ersten gefunden werden; wie aus der Vergleichung der über der Stelle eines jeden Gliedes hier befindlichen Ueberschrift, welche dessen Bedeutung anzeigt, erhellet. Den Logarithmen von 230075 finden, heißt, ein Glied der Progression finden, welche die Reihe der Logarithmen von 230000 bis 230100 macht, und zwar ist in dieser Reihe das letzte Glied das 100ste und 1230075 welcher gesucht wird, das 75ste nach dem ersten.

Zweyter Fall. Wenn die gegebene Zahl **Ganze und Decimalbrüche** enthält, so wird zuvörderst der Logarithme derjenigen ganzen Zahl gesucht, welche mit der gegebenen in einerley Ordnung einerley Ziffern hat, und hierauf die Kennziffer dieses Logarithmen um so viel Einheiten vermindert, als die gegebene Zahl Decimalstellen hat. Der also verminderte Logarithme ist der gesuchte.

Z. B. Es seyn die Logarithmen folgender Zahlen

I. 96,8 II. 9,647 III. 9646,3 IV. 230,075

zu finden; so ist

I.	1968 = 2,9858753	folgl.	196,8 = 1,9858753
II.	19647 = 3,9843923		19,647 = 0,9843923
III.	196463 = 4,9843608		19646,3 = 3,9843608
IV.	1230075 = 5,3618694		1230,075 = 2,3618694

Anmerk. 1) Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellt aus Fr. 42. 4. Anmerk. 2. S. 348.

2) Wenn der Logarithme eines andern gemischten Bruchs, der nicht durch Decimalbrüche ausgedruckt ist, gefunden werden soll; so wird derselbe, zuvörderst in einen uneigentlichen Bruch verwandelt, und hierauf der Logarithme des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abgezogen. Der Rest ist der gesuchte Logarithme. Z. B. Es sey $1\frac{7}{9}$ zu bestimmen; so ist $7\frac{7}{9} = \frac{7^0}{9}$, und $1\frac{7^0}{9} = 170 - 19$.

Dritter Fall. Wenn eine gegebene Zahl Decimalbrüche enthält; so wird zuvörderst der Logarithme derjenigen Zahl gesucht, welche mit der gegebenen in einerley Ordnung einerley Ziffern hat, und deren höchste Ziffer in der Stelle der Einer steht. Diesem Logarithmen wird hierauf eine Zahl, mit Vorsetzung des Zeichens — vor derselben, beygefügt, die derjenigen Zahl gleich ist, welche anzeigt, um wie viel Stellen die höchste Ziffer der gegebenen Zahl von der Stelle der Einer entfernt ist.

Z. B. Es seyn die Logarithmen folgender Zahlen
I. 0,968 II. 0,09647 III. 0,0009649
zu finden; so ist

I.	1968 = 2,9858758	flg. 19,68 = 0,9858753	und 10,968 = 0,9858753-1
II.	19647 = 3,9843923	19,647 = 0,9843923	10,09647 = 0,9843923-2
III.	19649 = 3,9844823	19,649 = 0,9844823	10,0009649 = 0,9844823-4

Anmerk. 1) Es ist nemlich $0{,}968 = \frac{9{,}68}{10}$; $0{,}09647 = \frac{9{,}647}{100}$; $0{,}0009649 = \frac{9{,}649}{10000}$; folglich ist

$10{,}968 = 1\ 9{,}68 - 1$ 19 D. l. $1\ 9{,}68 = 1$
$10{,}09647 = 1\ 9{,}647 - 1$ 100 D. l. $1\ 9{,}647 = 2$ u. s. w.

die

die abzuziehende Zahl wird blos angezeigt, weil der Abzug nicht wirklich geschehen kann.

a) Den Logarithmen eines gemeinen eigentlichen Bruchs zu finden, verfährt man am bequemsten folgendergestalt. Man vermehrt die Kennziffer des Logarithmen des Zählers um eine Zahl, die aus so viel Einheiten besteht, als erforderlich sind, um den Logarithmen des Nenners von ihm abziehen zu können; hierauf verrichtet man den Abzug wirklich und fügt sodann dem Rest die zu der Kennziffer des Zählers addirte Zahl mit Vorsetzung des Zeichens — vor derselben bey, wodurch der gesuchte Logarithme angezeigt wird. Z. B. Es seien die Logarithmen folgender Brüche:

I. $\frac{963}{9649}$ II. $\frac{963}{230075}$

zu finden; so ist die Rechnung folgende:

		+ 2			+ 3
I.	l 963	= 2,9836263	II.	l 963	= 2,9836263
—	l 9649	= 3,9844823	—	l 230075	= 5,3618694
	l $\frac{963}{9649}$	= 0,9991440 — 2		l $\frac{963}{230075}$	= 0,6217569 — 3

Es ist nemlich $\frac{963}{9649} = \frac{963 \times 100}{9649 \times 100}$, folglich

l $\frac{963}{9649}$ = l 963 + l 100 — l 9649 — l 100 und l 100 = 2

u. s. w.

3) Es sey der Logarithme der vierten geometrischen Proportionalzahl zu den 3 Zahlen 9,76; 96463 und $\frac{963}{9649}$ zu finden; so ist die Rechnung folgende:

I.	9,67	= 0,9854265
II.	l 96463	= 4,9844889
III.	l $\frac{963}{9649}$	= 0,9991440 — 2
	II. + III.	= 3,9836329
	II. + III. — I.	= 2,9982064 gesucht. Logar.

Hier konnte, nachdem die Summe der Logarithmen II. und III. welche 5,9836329 ist, gefunden worden, von der Kennziffer derselben die dem Logarithmen III. beygefügte abzuziehende Zahl wirklich abgezogen werden. Dieses Beyspiel giebt

giebt einigen Begrif davon, wie mit ſolchen Logarithmen gerechnet wird.

44. Wie kann zu einem gegebenen Logarithmen, welcher in den Tafeln nicht befindlich iſt, die ihm zugehörige Zahl durch Hülfe der logarithmiſchen Tafeln gefunden werden?

1) Es wird unter den Logarithmen der Tafeln, welche die höchſte Kennziffer haben, folglich in der kleineren Tafeln unter den Logarithmen, deren Kennziffer 3 iſt, nachgeſucht, ob einer derſelben mit dem gegebenen Logarithmen einerley Decimalbrüche hat.

2) Findet ſich ein ſolcher in den Tafeln, ſo wird die ihm zugehörige Zahl mit 10 oder 100 oder 1000 u. ſ. w. **multiplicirt** oder **dividirt**, je nachdem die Kennziffer des gegebenen Logarithmen um 1 oder 2, oder 3 u. ſ. w. **größer** oder **kleiner** als die Kennziffer des Logarithmen der Tafeln iſt. Die alſo veränderte Zahl iſt die Zahl des gegebenen Logarithmen.

Z. B. Zu folgenden drey Logarithmen, die in den Decimalbrüchen nicht verſchieden ſind

I. 5,1225435 II. 0,1225435 III. 0,1225435—2

gehören, weil 3,1225435=11326 gefunden wird, die Zahlen

I. 132600 II. 1,326 III. 0,01326

Anmerk. 1) Da eine Zahl mit 10, 100, 1000 u. ſ. w. multiplicirt oder dividirt wird, indem das Comma, welches die Stelle der Einer bezeichnet, um 1, 2, 3 u. ſ. w. Stellen zurück- oder vorgerückt wird, ſo kann auch die hier gegebene Regel für die Ausübung bequemer folgendergeſtalt ausgedruckt werden: „Wenn ſich ein ſolcher Logarithme — „in den Tafeln findet, ſo wird von der niedrigſten Ziffer der „dieſem Logarithmen zugehörigen Zahl das Comma um ſo „viel Stellen **zurück**, oder **vorgerückt**, um ſo viel Einheiten „die Kennziffer des gegebenen Logarithmen größer oder „kleiner als die Kennziffer des Logarithmen der Tafeln iſt. „Die auf dieſe Art veränderte Zahl iſt die geſuchte“. Die hier gegebenen Beyſpiele erläutern dieſes. Die Kennziffern

ziffern des dritten Logarithmen 0 — 2 ist um 5 kleiner als 2.

3) Wenn kein Logarithme der Tafel mit dem gegebenen Logarithmen einerley Decimalbrüche hat, so werden

(1) Diejenigen zween zunächst auf einander folgenden Logarithmen der Tafeln aufgesucht, zwischen deren Decimalbrüchen die Decimalbrüche des gegebenen Logarithmen fallen.

Z. B. Es seien die Logarithmen

I. 5,3712153 II. 3,6941734 III. 2,4378215

gegeben; so sind die hieher gehörigen Logarithmen

für den Log. I.	für den Log. II.	für den Log. III.
5,3710679 = 1 2350	3,6940785 = 1 4944	2,4377506 = 1 2740
5,3712526 = 1 2351	3,6941663 = 1 4945	2,4379090 = 1 2741

2) Die Kennziffer der Logarithmen der Tafeln wird hierauf in die Kennziffer des gegebenen, wenn diese jener ungleich ist, verwandelt, und es werden zugleich in diesem Fall zu den also veränderten Logarithmen die zugehörigen Zahlen gesucht.

Aus den vorigen Logarithmen und ihren Zahlen werden demnach folgende

für den Log. I.	für den Log. II. (wie vorhin)	für den Log. III.
5,3710679 = 1 235000	3,6940785 = 1 4944	2,4377506 = 1 274
5,3712526 = 1 235100	3,6941663 = 1 4945	2,4379090 = 1 274,1

3) Zwischen diese Logarithmen fällt der gegebene, und zwischen die ihnen zugehörige Zahlen fällt die gesuchte Zahl. Es wird daher hierauf der Unterschied der beyden Logarithmen, zwischen welche der gegebene fällt, ferner der Unterschied des kleineren derselben von dem gegebenen, und endlich der Unterschied der

Zahlen, zwischen welche die gesuchte Zahl fällt, genommen, und zu diesen dreyen Unterschieden in der Ordnung, in welcher sie hier angezeigt sind, die vierte Proportionalzahl gefunden. Diese ist der Unterschied der gesuchten Zahl von der kleineren der beyden Zahlen, zwischen welche sie fällt.

Für die drey gegebenen Logarithmen ist demnach die Rechnung folgende:

Für den Logar. I.

1235100 = 5,3712526	gegeb. Logar. 5,3712155	235100
1235000 = 5,3710679	1235000 = 5,3710679	235000

erst. Unterschied 0,0001847 zweyt. Unterschied = 0,0001476 drit. Unt. 100

0,0001847 : 0,0001476 = 100 : vierte Pr. Z.
oder 1847 : 1476 = 100 : — —

100

1847) 147600 | 79,9 Unterschied der gesuchten Zahl von 235000.

Für den Logar. II.

14945 = 3,6941663	gegeb. Logar. 3,6941534	4945
14944 = 3,6940785	14944 = 3,6940785	4944

erst. Unterschied 0,0000878 zweyter Unterschied 0,0000749 dritter Unt. 1

0,0000878 : 0,0000749 = 1 : vierte Pr. Z.
oder 878 : 749 = 1 : — —

1

878) 749,00 | 0,85 Unterschied der gesuchten Zahl von 4944.

Für den Logar. III.

1274,1 = 2,4379090	gegeb. Log. 2,4378215	274,1
1274 = 2,4377506	1274 = 2,4377506	274,0

erster Unterschied 0,0001584 zweyt. Unterschied 0,0000709 drit. Unt. 0,1

0,0001584 : 0,0000709 = 0,1 : vierte Pr. Z.
oder 1584 : 709 = 0,1 : — —

0,1

1584) 70,900 | 0,045 Unterschied der gesuchten Zahl von 274,0

4) Die

4) Dieſer gefundene Unterſchied wird daher zu dieſer kleineren Zahl addirt; die Summe iſt die dem gegebenen Logarithmen zugehörige Zahl.

I.	II.	III.
1235000	4944	274
79,9	0,85	0,045
1235079,9 geſ. Zahl.	4944,85 geſ. Zahl.	274,045 geſ. Zahl.

Folglich iſt I. $5,3712155 = 1235079,9$
II. $3,6941534 = 14944,85$
III. $2,4378215 = 1274,045$

Anmerk. 1) Wie die Aufgabe der 44ſten Frage aus der Umkehrung der Aufgabe der 43ſten Frage entſteht, ſo entſteht auch die Rechnung, die zu ihrer Auflöſung dient, aus der Umkehrung der Rechnung bey der 43ſten Frage, und ſie iſt daher auch mit der im Vorhergehenden (Fr. 38. 2) Anmerk. 5.) gemachten Rechnung im Weſentlichen einerley, auch ſtimmt das zweyte dort gegebene Beyſpiel beynahe völlig mit dem hier gegebenen erſten überein. Indem bey dem zweyten Logarithmen die zugehörige Zahl bis auf Hundertel, bey dem dritten bis auf Tauſendtel, welche Hundertel der Zehntel ſind, geſucht iſt, iſt vorausgeſetzt worden, daß die Logarithmen, zwiſchen welche die gegebenen fallen, zu Progreſſionen gehören, deren äußerſte Glieder um hundert Stellen von einander entfernt ſind. Die Zahl der Stelle des gegebenen Logarithmen, iſt dem Unterſchiede gleich, welcher hier geſucht iſt.

2) Die bey dieſer Rechnung erforderliche Diviſion giebt den Quotienten mehrentheils nur höchſtens auf zwey bis drey Ziffern zuverläſſig, und überhaupt erſtreckt ſich der Vortheil dieſer Rechnungen, wenn Genauigkeit erforderlich iſt, nicht auf jede willkührliche Anzahl Ziffern, aus welchen eine gegebene Zahl beſteht, noch auf jede willkührlich große Kennziffer eines gegebenen Logarithmen.

3) Wenn ein Logarithme mit einer abzuziehenden Kennziffer, z. B. $0,4378215 - 2$ gegeben iſt; ſo iſt es am bequemſten, zuvörderſt diejenige Zahl zu ſuchen, welche dieſem Logarithmen zugehören würde, wenn ſeine Kennziffer blos 0 wäre. Die Decimalen des Logarithmen $0,4378215$ ſind mit den Decimalen des obigen dritten Beyſpiels einerley; daher iſt $0,4378215 = 12,74045$. Hieraus folgt alsdenn nach dem Vorhergehenden, daß $0,4378215 - 2 = 10,0274045$ ſey.

4) Durch Hülfe der Logarithmen können zu gegebenen gemeinen Brüchen wenigſtens die erſten Ziffern der Decimal-

brüche leicht gefunden werden, welche diesen gleich sind. Es sey der Bruch $\frac{963}{9649}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln; so wird zuvörderst der Logarithme dieses Bruchs, und hierauf die ihm zugehörige Zahl gesucht, welche die geforderte ist. Es ist $1 - \frac{963}{9649} = 0{,}9991440 - 2$; und die diesem Logarithmen zugehörige Zahl wird $0{,}9988091$ gefunden.

3) In vielen Fällen, zumal wenn die Kennziffer 0, oder noch kleiner, d. i. wenn dem Logarithmen eine Zahl mit dem Zeichen — beygefügt ist, ist es hinlänglich, die Zahl desjenigen Logarithmen der Tafeln, dessen Decimalen den Decimalen des gegebenen Logarithmen am nächsten kommen, für die Zahl anzunehmen, welche auch dem gegebenen Logarithmen zugehört.

Von der ebenen Trigonometrie.

45. Was ist die ebene Trigonometrie?

Die Wissenschaft von Berechnung unbekannter Seiten und Winkel eines ebenen Dreyecks aus so vielen bekannten Seiten und Winkeln desselben, als erforderlich sind, um ein Dreyeck zu bestimmen.

Anmerk. 1) Wenn aus gewissen gegebenen Seiten und Winkeln nur ein einziges Dreyeck verzeichnet werden kann, und jedes andere Dreyeck, welches aus eben diesen Stücken verzeichnet wird, dem erstern gleich und ähnlich ist, so sagt man, diese Stücke bestimmen ein Dreyeck. Dergleichen sind, 1) eine Seite und zween Winkel, deren Lage gegen diese Seite zugleich gegeben ist; 2) zwo Seiten, und der von ihnen eingeschlossene Winkel; 3) drey Seiten, deren jede kleiner ist, als die Summe der beyden andern. Aus mehreren, als diesen, willkührlich angenommenen Stücken kann, wenn sie nicht etwa durch einen Zufall zusammenstimmen, überall kein Dreyeck, aus wenigeren aber, wie auch aus andern, als den genannten, Stücken können mehrentheils unzählig viele verschiedene Dreyecke verzeichnet werden. Z. B. Nicht aus jeden drey Seiten und einem rechten Winkel kann ein Dreyeck verzeichnet werden, wenn die Seiten sich nicht wie 3 4 5 verhalten. Drey Winkel allein bestimmen ein Dreyeck nicht. Alle blos ähnliche Dreyecke haben gleiche Winkel, ohnerachtet die Größe ihrer

ihrer Seiten sehr verschieden seyn kann. Unter den Stücken, welche ein einziges Dreyeck bestimmen, muß daher wenigstens eine Seite seyn. Zwo Seiten und ein Winkel, welchem die eine dieser beyden Seiten gegenüber liegt, bestimmen zuweilen zwey Dreyecke, zuweilen nur eins. Z. B. Wenn in Fig. 33. AC, der Winkel ACB, und eine Seite, so groß wie AB, welche diesem Winkel gegenüber liegen soll, gegeben sind: so bestimmen diese drey Stücke sowol das Dreyeck, ABC, als das Dreyeck, ADC, wenn AD = AB ist. Wenn aber AB, der Winkel ABC, und AC gegeben sind; so wird dadurch nur ein Dreyeck, nemlich ABC bestimmt. Es kann nemlich, weil AC > AB, hier zwischen AC und AB keine Linie aus A, welche der AC gleich wäre, so gezogen werden, wie im vorigen Fall AD = AB zwischen AB und AC.

2) Diese Wissenschaft wird die ebene Trigonometrie zum Unterschiede von der sphärischen Trigonometrie genannt, welche die Wissenschaft von Berechnung sphärischer Dreyecke ist.

3) Zur trigonometrischen Berechnung der Dreyecke, welche, größtentheils durch Hülfe der Proportionen geschieht, ist nöthig, die Verhältnisse der Winkel der Dreyecke mit den Verhältnissen der Seiten derselben zu vergleichen. Hiezu dient die Kenntniß der trigonometrischen Linien, von welchen daher zuvörderst gehandelt werden wird.

§6. Welches sind die vornehmsten trigonometrischen Linien?

Der Sinus und Cosinus, die Tangente und Cotangente eines Bogens oder des ihm zugehörigen Winkels.

Anmerk. 1) Bogen und Winkel, welche gleichviel Grade haben, sind zusammengehörig. Dergleichen sind allemal Bogen, zwischen den Schenkeln der Winkel, deren Mittelpunct die Spitze der Winkel ist; z. B. Fig. 71. ACG und AG; ACF und AF ꝛc. Fig. 53. CDE und FG u. s. w. Bogen von verschiedenen Halbmessern, welche zu einerley oder gleichen Winkeln am Mittelpunct gehören, haben gleichviel Grade. Sie werden ähnliche Bogen genannt. Dergleichen sind z. B. Fig. 5. EG und DF.

2) Wie in der Geometrie zur Bezeichnung des rechten Winkels oder der Summe von rechten Winkeln die Ausdrücke R, 2R u. s. w. gebraucht werden, so werden zugleich in

der Trigonometrie die Ausdrücke Q, 2Q, 3Q ꝛc. zur Bezeichnung eines Quadranten, der Summe von zween, drey ꝛc. Quadranten gebraucht. Z. B. Fig. 71. AG > Q; AF > 2Q; ADBM > 3Q bedeutet, daß der Bogen AG kleiner als ein Quadrant (AD); der Bogen AF kleiner als die Summe von zween Quadranten (ADE), und der Bogen ADBM gröſser als die Summe von drey Quadranten (ADBE) ſey.

3) Ergänzung oder Complement eines gegebenen Bogens, welcher kleiner, als 2Q iſt, zu einem Quadranten heiſst in der Trigonometrie derjenige Bogen, um welchen der gegebene entweder kleiner oder gröſser, als ein Quadrant iſt. Eben ſo heiſst Ergänzung eines gegebenen Winkels, welcher kleiner als 2R iſt, zu einem rechten Winkel; derjenige Winkel, um welchen der gegebene entweder kleiner oder gröſser, als 1R iſt. Z. E. In Fig. 71. iſt

des Bogens	Ergänzung zu Q	des Winkels	Ergänzung zu R
AG	DG	ACG	GCD
AF	DF	ACF	DCF

Ein ähnlicher Begriff der Ergänzung zu 3Q und 3R findet bey Bogen und Winkeln statt, welche gröſser, als 2Q und 2R ſind. Z. B. EP iſt die Ergänzung von ADBP, und EM von ADBM zu 3Q; ECP iſt die Ergänzung des Winkels ACP, welcher gröſser als 2R iſt, zu 3R u. ſ. w. Indeſſen kommen dergleichen gröſsere Bogen und Winkel ſeltener in trigonometriſchen Rechnungen vor. Zur Bezeichnung der Ergänzung dient der Buchſtabe c; z. B. cAG; cACG bedeutet die Ergänzung des Bogens AG; die Ergänzung des Winkels ACG.

47. Was iſt der Sinus und Coſinus eines Bogens oder Winkels?

1) Eine gerade Linie, welche aus dem einen Endpunct eines Bogens bis zu dem Durchmeſſer, welcher durch den andern Endpunct geht, ſenkrecht gegen dieſen, gezogen werden kann, heiſst der Sinus dieſes Bogens oder des ihm zugehörigen Winkels.

Z. B. Fig. 71. iſt

des Bogens	oder Winkels	Sinus
AG	ACG	LG
DG	DCG	OG
AF	ACF	QF
ADBP	ACP (> 2R)	QP
Ag		lg

Andere

Andere Beyspiele geben Fig. 3., Fig. 5. und Fig. 47. Aa, welches der Sinus von Aca ist.

Anmerk. Der Sinus eines Bogens oder Winkels wird durch sin so, wie folgende Beyspiele zeigen: sinAG; sinACF, d. i. der Sinus des Bogens AG; der Sinus des Winkels, ACF, bezeichnet.

2) Der Sinus der Ergänzung eines Bogens, oder des ihm zugehörigen Winkels heißt der **Cosinus** dieses Bogens oder Winkels.

Z. B. In Fig. 71. ist

des Bogens	oder Winkels	Cosinus
AG	ACG	OG
AF	ACF	OF

Es ist nemlich OG = sin DG und DG = cAG; OF = sin DF und DF = cAF.

Anmerk. 1) Der Cosinus eines Bogens oder Winkels wird durch cos so, wie folgende Beyspiele zeigen, bezeichnet; cosAG; cosACF, d. i. der Cosinus des Bogens AG, der Cosinus des Winkels ACF. CosAG = sincAG drückt die Erklärung des Cosinus durch Zeichen, oder durch eine Formel aus.

2) Weil umgekehrt AG = cDG; so ist auch umgekehrt sinAG, d. i. LG = cosDG.

3) Die Ergänzung des Bogens von 45° ist gleichfalls ein Bogen von 45°; daher ist sin 45° = cos 45°.

4) Aus dem oben angeführten Begrif der Ergänzung erhellet, daß z. B. RP = cosADBF; RM = cosADBM sey, u. s. w.

5) Wenn Sinus und Cosinus eines Bogens, z. B. AG, so wie in Fig. 71. zusammengesetzt werden, welches gewöhnlich ist, und dadurch erhalten wird, daß die Durchmesser AB, DE, auf welchen sie senkrecht stehn, auch gegen einander senkrecht gezogen, folglich der eine durch den Anfangspunct A, der andere durch den Endpunct D des Quadranten AD, nicht durch G, (welches auch geschehen könnte, da denn eine senkrechte Linie aus D auf GP der QG gleich, und ebenfalls sinDG seyn würde) gelegt wird, so wird aus der Betrachtung der 71sten Figur folgendes deutlich seyn. Der Sinus eines jeden Bogen oder Winkels (z. L oder QF) theilt den Halbmesser, gegen welchen er senkrecht steht, (CA oder CB) in 2 Theile (CL, LA oder CQ, QB). Derjenige

dieſer Theile, welcher am Mittelpunct liegt (CL oder CQ), iſt dem Coſinus deſſenigen Bogens oder Winkels gleich, zu welchem der Sinus gehört (CL = OG = cos AG; CQ = OF = cos AF). Der andere Theil (LA, oder QB) wird der Querſinus (ſinus verſus) eben dieſes Bogens oder Winkels genannt. Der Coſinus (OG oder OF) deſſelben Bogens oder Winkels theilt auf eine ähnliche Art den Halbmeſſer CD in zween Theile (CO, OD). Derjenige dieſer Theile, welcher am Mittelpunct liegt (CO), iſt dem Sinus deſſelben Bogens oder Winkels gleich (CO = LG; CO = QF) der andere Theil OD wird der Quereoſinus (Coſinus verſus) oder Querſinus der Ergänzung deſſelben Bogens oder Winkels genannt.

6) Ueberhaupt entſteht durch den Sinus und Coſinus bey der angezeigten Verzeichnungsart derſelben allemal ein Rechteck, wie GLCO, FQCO. Beyde Rechtecke ſind gleich, wenn DG = DF iſt. Wenn die Bogen AG, GD, jeder 45° ſind, ſo iſt das Rechteck GLCO zugleich ein Quadrat. Und wenn auch in dieſem Fall DF = DG, folglich AF = 90° + 45° d. i. 135°, ſo iſt auch FQCO ein Quadrat.

7) Der Sinus eines Quadranten oder rechten Winkels iſt dem Halbmeſſer gleich; der Coſinus derſelben aber iſt o. Dagegen iſt der Halbmeſſer (CA) der Coſinus eines Bogens, welcher o iſt, d. i. deſſen Anfangspunct und Endpunct beyde in A zuſammenfallen.

48. Welches ſind die vornehmſten Eigenſchaften der Sinus und Coſinus der Bogen oder Winkel, vornehmlich ſolcher, welche kleiner als 2Q, oder 2R, ſind?

1) Die Summe der Quadrate des Sinus und Coſinus eines jeden Bogens oder Winkels iſt dem Quadrate des Halbmeſſers des Bogens gleich.

Anmerk. 1) In dem rechtwinklichten Dreyeck LGC iſt LG = AC; CL = cos AG; daher folgt dieſe Eigenſchaft der Sinus und Coſinus aus dem pythagoriſchen Lehrſatz.

2) Das Quadrat des Coſinus eines Bogens iſt daher dem Ueberſchuß des Quadrats des Halbmeſſers über das Quadrat des Sinus deſſelben Bogens gleich, woraus erhellt, wie der Coſinus eines Bogens gefunden werden könne, wenn der Sinus deſſelben bekannt iſt.

Beyſ

Beyspiele. 1) Wenn der Halbmesser CG aus 10 000 000 Theilen bestünde, und LG die Hälfte desselben wäre, folglich 5 000 000 solcher Theile betrüge; so würde durch folgende Rechnung gefunden, wie viel solcher Zehnmillionentheile des Halbmessers CL oder cosAG betrage:

$$CG^q = 100\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$-LG^q = 25\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$CL^q = 75\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$\sqrt{CL^q} = \sqrt{75\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,8660254} = CL$$

Demnach beträgt der Cosinus des Bogens AG 8660254 solcher Theile, dergleichen der Halbmesser Zehnmillionen enthält. Wenn die Ausziehung der Wurzel noch auf drey Stellen fortgesetzt wird, so findet man die Größe dieses Cosinus in Zehntausendmillionentheilen des Halbmessers.

2) Wenn $AG = 45°$ ist, so ist $CL = LG$ und $CL^q = LG^q$, folglich ist in diesem Fall $CG^q = 2LG^q$ und $\frac{1}{2}CG^q = LG^q$.

Wird nun, wie vorhin, $CG = 10\ 000\ 000$ angenommen, so ist

$$CG^q = 100\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$\frac{1}{2}LG^q = 50\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$\sqrt{LG^q} = \sqrt{50\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,7071068} = LG$$

Demnach enthält der Sinus von 45 Graden 7071068 solcher Theile, dergleichen der Halbmesser Zehnmillionen enthält, und wenn r den Halbmesser bedeutet; so ist

$$r : \sin 45° = 10\ 000\ 000 : 7071068$$
oder $$r : \sin 45° = 1 : 0{,}7071068$$

Wenn gleich ein Bogen von 45° in einem andern Kreise einen größern oder kleinern Halbmesser hat; so ist dennoch die Verhältniß seines Halbmessers zu seinem Sinus eben dieselbe. Z. B. Wenn in Fig. 5. sowol DF, als EG 45° beträgt, so ist

$$CF : FE = 1 : 0{,}7071068$$
und auch $$CG : GI = 1 : 0{,}7071068$$

2) Ein jeder Sinus ist zugleich die Hälfte einer Sehne, und der Bogen, dem er zugehört, ist die Hälfte des Bogens dieser Sehne.

Z. B. Fig. 71 $LG = \sin AG$, u. $LG = \frac{1}{2}MG$; $AG = \frac{1}{2}MAG$.
$QF = \sin AF$, u. $QF = \frac{1}{2}PF$; $AF = \frac{1}{2}PAF$.

Anmerk. 1) Daher ist die Hälfte jeder Seite eines ordentlichen Vielecks, welches in einem Cirkel beschrieben ist, wie Aa Fig. 47. der Sinus der Hälfte des Winkels am Mittelpunct. Z. B. der Winkel AcB des ordentlichen Siebenecks in Fig. 47. beträgt $\frac{1}{7} \cdot 360^\circ$ und seine Hälfte $\frac{1}{7} \cdot 180^\circ$; oder $25\frac{5}{7}^\circ$ demnach ist $Aa = \sin 25\frac{5}{7}^\circ$.

2) Bey einem Sechseck beträgt dieser Winkel 60° und seine Hälfte 30°; die Seite des Sechsecks aber ist dem Halbmesser gleich. Demnach ist der Sinus eines Bogens von 30° der Hälfte des Halbmessers dieses Bogens gleich. Wenn der Halbmesser $= 10000000$ ist; so ist $\sin 30^\circ = 5000000$, und der vorhin (Fr. 48. 1) Anmerk. 2) Beyspiel 1) gefundene Cosinus 8660254 ist der Cosinus von 30°, folglich zugleich der Sinus von 60°.

3) Zween Bogen von gleichen Halbmessern, deren einer des andern Ergänzung zu 2Q, und zween Winkel, deren einer des andern Ergänzung zu 2R ist, haben gleiche Sinus und gleiche Cosinus.

In Fig. 71. ist (1) LG der Sinus und OG der Cosinus sowol von AG und ACG als von BG und BCG; aber $AG + BG = 2Q$ und $ACG + BCG = 2R$. (2) QF ist der Sinus, und OF der Cosinus sowol von BF und BCF als von AF und ACF.

Anmerk. 1) Wenn zugleich, wie die 71 Figur voraussetzt, $BF = AG$, folglich $FD = GD$ ist; so ist auch $QF = LG$; $OF = OG$. Es ist nemlich unter dieser Voraussetzung $AG + AF = 2Q$; $ACG + ACF = 2R$. Zu jedem Bogen, der kleiner als $2Q$, aber größer als Q ist, und zu jedem stumpfen Winkel, wie ACF, giebt es demnach einen Bogen, der kleiner als Q ist, und einen spitzen Winkel, ACG, der mit ihm einen gleich großen Sinus und Cosinus hat. Z. B. $\sin 45^\circ = \sin 135^\circ$; $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$; $\cos 30^\circ = \cos 150^\circ$, woraus erhellt, daß, wenn die Verhältnisse der Sinus und Cosinus aller spitzen Winkel, oder aller Bogen, die kleiner als Q sind, zum Halbmesser bekannt

kannt sind, auch die Verhältnisse der Sinus und Cosinus aller stumpfen Winkel, oder solchen Winkeln zugehöriger Bogen, zum Halbmesser, bekannt sind. Dies gilt auch, wie selbst aus Fig. 71. sich leicht ergiebt, von Bogen und Winkeln, welche größer als 2Q und 2R sind, deren Betrachtung jedoch hier übergangen werden soll.

2) Der Halbmesser ist der größte unter allen Sinussen und Cosinussen der Winkel, wie auch der Bogen von gleichen Halbmessern. Die übrigen Sinus und Cosinus sind den Theilen des Halbmessers gleich. Z. B. LG = GO; OG = CL. Der Halbmesser wird daher auch *Sinus totus* genannt, und gewöhnlich mit r bezeichnet.

3) Die Sinus aller Bogen und Winkel, welche kleiner als 2Q, 2R sind, sind Theilen ebendesselben Halbmessers gleich. Z. B. LG und QF sind beyde dem Theil CO des Halbmessers CD, die Sinus lg, qf sind gleichfalls Theilen eben dieses Halbmessers CD gleich. Die Cosinus dieser Bogen und Winkel aber wie OG, OF sind verschiedentlich Theilen zweener Halbmesser (CA und CB) gleich, welche in einer geraden Linie an verschiedenen Seiten des Mittelpunkts liegen, und eine entgegengesetzte Richtung haben; OF = CQ; OG = CL; und zwar sind die Cosinus der Bogen und Winkel, welche kleiner als Q und R sind, Theilen des einen Halbmessers CA, die übrigen aber Theilen des andern CB gleich. Diese Sätze sind in der Mathematik von großer Erheblichkeit.

4) Je größer ein spitzer Winkel ist, desto größer ist sein Sinus, und desto kleiner sein Cosinus. Je größer ein stumpfer Winkel ist, desto kleiner ist sein Sinus und desto größer sein Cosinus. Ueberhaupt, je spitzer oder stumpfer ein Winkel ist, desto kleiner ist sein Sinus, und desto größer sein Cosinus. Erläuterungen dieser Sätze giebt Fig. 71. bey den Bogen Ag, AG, AF, Af.

4) Die Sinus und Cosinus gleicher Winkel und ähnlicher Bogen haben zu den Halbmessern derselben einerley Verhältniß; sie sind gleichgroße Theile derselben.

Z. B. Fig. 1. sind die Bogen GE, DF ähnlich, folglich ist IG : CG = HF : CF.

Anmerk. 1) Wenn ähnliche Bogen concentrisch gemacht werden, so entsteht allemal eine Figur, wie die fünfte, wo die Halbmesser CF, CG in eine gerade Linie fallen, wenn CE, CD in einer geraden Linie liegen; hieraus erhellt die Richtig-

Richtigkeit dieses Satzes, indem CGI ∽ CFH. Und da ein jeder Cosinus zugleich ein Sinus ist, so gilt der Satz auch von Cosinussen ähnlicher Bogen.

2) Wenn daher von jedem Halbmesser, er sey übrigens von welcher Größe man will, angenommen wird, daß er aus 10000000 Theilen bestehe, so bestehen die Sinus und Cosinus gleicher Winkel und ähnlicher Bogen, aus gleichvielen Zehnmillionentheilen ihres Halbmessers. Beyspiele sind Fr. 48. 1) Anmerk. 2). Die Verhältnisse der Sinus zu ihrem Halbmesser sind unter dieser Voraussetzung wirklich berechnet, und es sind daraus die Tafeln der Sinus entstanden, deren Einrichtung im Folgenden gezeigt werden wird.

§9. Was ist die Tangente und Cotangente eines Bogens oder Winkels?

1) Wenn durch den einen Endpunct A eines Bogens AG eine Tangente NH von unbestimmter Länge, und durch den andern Endpunct G ein Halbmesser des Kreises gezogen, und bis zu dieser Tangente verlängert wird, CH, so heißt derjenige Theil der Tangente, welcher zwischen dem Berührungspunct A und dem Durchschnittspunct des verlängerten Halbmessers H enthalten ist, die **Tangente** dieses Bogens AG oder des ihm zugehörigen Winkels ACG.

So ist z. B. des	Bogens	oder Winkels	Tangente
	AG	ACG	AH
	DG	DCG	DI
	DF	DCF	DK

Des Bogens AF oder Winkels ACF Tangente ist AN, indem HN durch dessen Anfangspunct A geht, und durch den Endpunct F der Halbmesser FC gezogen ist, welcher aber hier nicht bey F, sondern bey C verlängert werden mußte, um die Tangente zu treffen. Hieraus erhellt auch, daß z. B. des Bogens ADBP Tangente AH, des Bogens ADBM Tangente AN sey; deren Betrachtung jedoch hier gleichfalls übergangen wird.

Anmerk. 1) Die Tangente macht mit dem Halbmesser, auf welchem sie senkrecht steht, und mit der gezogen Linie, welche ihren Endpunct bestimmt, ein rechtwinklichtes Drey-

eck,

eck, deſſen gröſte Seite die hier zuletzt genannte Linie iſt. Dieſe wird die Secante des Bogens oder des ihm zugehörigen Winkels genannt. Z. B. Der Bogen AG, DG, DF, AF Secanten ſind CH, CI, CK, CN.

2) Die Tangente eines Bogens oder Winkels wird durch tang oder t bezeichnet; z. B. tang AG oder t AG bedeutet die Tangente des Bogens AG.

2) Die Tangente der Ergänzung eines Bogens oder des ihm zugehörigen Winkels heißt die **Cotangente** dieſes Bogens oder Winkels.

So iſt z. B. des Bogens	oder Winkels	Cotangente
AG	ACG	DI
AF	ACF	DK.

Es iſt nemlich DI = t DG, und DG = c AG u. ſ. w.

Anmerk. 1) Die Secante der Ergänzung eines Bogens oder Winkels, heißt deſſen Coſecante. So ſind z. B. CI, CK die Coſecanten der Bogen AG, AF.

2) Die Cotangente eines Bogens oder Winkels wird durch cot bezeichnet; z. B. cot AG bedeutet die Cotangente des Bogen AG.

3) Die Tangente des Quadranten AD oder rechten Winkels ACD iſt unendlich groß; denn der zu verlängernde Halbmeſſer, welcher den andern Endpunct derſelben beſtimmen ſollte, iſt CD, und CD iſt mit AH gleichlaufend. Die Cotangente des Quadranten iſt o. Dagegen iſt die Cotangente eines Bogens, welcher in A ſeinen Anfangs- und Endpunct hat, unendlich groß. Das Zeichen des Unendlichgroßen iſt ∞. Demnach iſt tang Q = ∞; cot A = ∞.

50. Welches ſind die vornehmſten Eigenſchaften der Tangenten und Cotangenten der Bogen oder Winkel, vornemlich ſolcher, welche kleiner als 2Q oder 2R ſind?

1) Die Tangente eines jeden Bogens oder Winkels iſt die vierte Proportionallinie zu deſſen Coſinus, Sinus und dem zugehörigen Halbmeſſer; die Cotangente aber iſt die vierte Proportionallinie zu dem Sinus, Coſinus und Halbmeſſer.

Anmerk.

Anmerk. 1) In Fig. 71. ist

1) CL : LG = CA. : AH (weil CLG ∽ CAH)
d. i. cos AG : sin AG = r : tang AG

2) CQ : QF = CA : AN (weil CQF ∽ CAN)
d. i. cos AF : sin AF = r : tang AF

3) CO : OG = CD : DI (weil COG ∽ CDI)
d. i. sin AG : cos AG = r : cot AG

4) CO : OF = CD : DK (weil COF ∽ CDK)
d. i. sin AF : cos AF = r : cot AF

woraus die Richtigkeit der hier angezeigten Eigenschaften erhellt.

2) Wenn der Sinus eines Bogens oder Winkels bekannt ist, so kann auch dessen Cosinus gefunden werden (Fr. 48. 1) Anmerk. 2); aus beyden kann alsdenn sowol die zugehörige Tangente als Cotangente leicht berechnet werden. Wenn man die a. a. O. berechneten Sinus und Cosinus hier zu Beyspielen nimmt, so findet sich tang 30° = 5773503; cot 30° = 17302508 aber tang 45° = 10000000, d. i. die Tangente von 45° ist dem Halbmesser des Bogens gleich, weil hie 45° = cos 45°; desgleichen ist auch cot 45° = 10000000.

3) Wenn man die erste der vorhin (Anmerk. 1) angeführten Proportionen mit der dritten, und die zwote mit der vierten vergleicht; so findet man daraus durch Umkehrung der Verhältnisse der zwoten und vierten, folgende:

cot AG : r = r : tang AG (aus 1 und 3)
cot AF : r = r : tang AF (aus 2 und 4)

Diese Proportionen zeigen folgende wichtige Eigenschaft der Tangenten an: der Halbmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Tangente und Cotangente eines jeden Bogens. Hieraus folgt wiederum, daß die Verhältniß der Tangenten zweener Bogen oder Winkel der umgekehrten Verhältniß ihrer Cotangenten gleich sey; z. B.

cot AG ; cot AF = tang AF : tang AG.

2) Zween Bogen von gleichen Halbmessern, deren einer des andern Ergänzung zu 2Q, und zween Winkel, deren einer des andern Ergänzung zu 2R ist, haben gleiche Tangenten und gleiche Cotangenten.

Z. B. Wenn BF = AG, folglich AG + AF = 2Q; so ist AH = AN und DI = DK, d. i. tang AG = tang AF, und cot AG = cot AF.

Anmerk.

Anmerk. 1) Wenn FB=AG: so sind auch die Winkel ACG, FCB und ACN, welcher letztere des Winkels FCB Scheitelwinkel ist, einander gleich. Hieraus folgt die Gleichheit der beyden Dreyecke ACH, ACN; indem beyde eine gemeinschaftliche Seite AC, und zween gleiche und ähnlich liegende Winkel haben. Wenn aber ACH=ACN; so ist auch AH=AN. Ferner wenn AG=FB; so sind zugleich die Bogen DG, DF und die ihnen zugehörigen Winkel gleich, woraus die Gleichheit der Dreyecke CDI, CDK, und die Gleichheit ihrer Seiten DI und DK auf eine ähnliche Art folgt.

2) Zu jedem Bogen, der größer als Q ist, und zu jedem stumpfen Winkel giebt es demnach einen Bogen, der kleiner als Q ist, oder einen spitzen Winkel, der mit ihm eine gleichgroße Tangente und Cotangente hat. Doch ist auch hier zu merken, daß die Tangenten und Cotangenten stumpfer Winkel oder solchen Winkeln zugehöriger Bogen nach Fig. 71. eine Lage haben, welche der Lage der Tangenten und Cotangenten für spitze Winkel und für Bogen, welche kleiner als Q sind, so entgegengesetzt ist, wie vorhin (Fr. 48. 3) Anmerk. 3) von den Theilen der Halbmesser CQ, CL angemerkt ist.

3) Je größer ein spitzer Winkel ist, desto größer ist seine Tangente, und desto kleiner seine Cotangente. Je größer ein stumpfer Winkel ist, desto kleiner ist seine Tangente, und desto größer seine Cotangente. Ueberhaupt, je spitzer oder stumpfer ein Winkel ist, desto kleiner ist seine Tangente, und desto größer seine Cotangente.

3) Die Tangenten und Cotangenten gleicher Winkel, und ähnlicher Bogen haben zu den Halbmessern derselben gleiche Verhältnisse.

z. B. Fig. 5. ist EL:CE=DK:CD.

Anmerk. 1) Diese Eigenschaft der Tangenten, welche sie mit den Sinussen und Cosinussen gemein haben, erhellt auch auf ähnliche Art (Fr. 48. 4) Anmerk 1.) aus Betrachtung der fünften Figur, indem auch die Dreyecke CEL, CDK ähnlich sind. Und da jede Cotangente zugleich eine Tangente ist: so gilt diese Eigenschaft der Tangenten auch von den Cotangenten.

2) Wenn daher auch zur Bestimmung der Verhältnisse der Tangenten zum Halbmesser angenommen wird, daß dieser, er sey übrigens von welcher Größe man will, aus 100 000 Theilen bestehe, so bestehn auch die Tangen-

ten und Cotangenten gleicher Winkel und ähnlicher Bögen aus gleichvielen Zehnmillionentheilen ihres Halbmessers.

3) Die Verhältnisse der Sinus und Tangenten zum Halbmesser sind für Bogen und Winkel, welche kleiner als Q und R sind, wirklich berechnet, sind es sind dadurch zugleich, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, sowol die Verhältnisse der Cosinus und Cotangenten zum Halbmesser für eben diese Bogen und Winkel, als auch überhaupt alle diese Verhältnisse für jede Bogen und Winkel, welche kleiner als 2 Q und 2 R sind, bekannt. Die Tafeln der Sinus und Tangenten sind eine Sammlung von Zahlen, welche diese Verhältnisse bestimmen. Sie sind von verschiedener Einrichtung und Vollständigkeit. Zur Erläuterung der Einrichtung der in dem Wolfischen Handbuch S. 212. bis 301. befindlichen Tafeln dient folgendes. (1) Die Zahlen, welche sie enthalten, bestimmen unter den Ueberschriften Sinus und Tang. die Größe der Sinus und Tangenten der Bogen oder Winkel von Minute zu Minute in Zehnmillionentheilen des Halbmessers, obwol eigentlich diese Zahlen für Zehntausendmillionentheile desselben berechnet sind. Der Kürze wegen sind nemlich die drey niedrigsten Ziffern derselben weggelassen worden. (2) Die Grade des Bogens oder Winkels, zu welchem jede Zahl eines Sinus oder Tangente gehört, sind oben am Anfange jeder Columne angezeigt. Jede Blattseite enthält zwo dergleichen Columnen, und in der ersten Spalte derselben steht unter der Ueberschrift Minut. neben jeder Zeile der Sinus- und Tangentenzahlen die Zahl der Minuten, welche der dieser Zeile zugehörige Bogen oder Winkel außer den Graden enthält. Auf jeder Seite stehn zu mehrerer Bequemlichkeit der Rechnung in jeder Zeile die Zahlen der Sinus und Tangenten zweyer Bogen oder Winkel, einander gegen über, deren einer des andern Ergänzung zu Q oder R ist. Z. B. Folgende Tafel ist der Anfang der 240sten Seite.

Minut.	14 Grad		Minut.	75 Grad	
	Sinus	Tang.		Sinus	Tang.
0	24192.19	24932.80	60	97029.57	401078.09
1	24220.41	24963.70	59	97022.53	400581.65
2	24248.63	24994.60	58	97015.48	400086.36
3	24276.85	25025.51	57	97008.42	399592.23
4	24305.07	25056.42	56	97001.35	399099.24
5	24333.29	25087.34	55	96994.28	398607.39
6	24361.50	25118.26	54	96987.20	398116.69

Hier

Hier enthält die erste Columne nach der Reihe die Zahlen der Sinus und Tangenten für Bogen oder Winkel von

14° 0′ 14° 1′ 14° 2′ 14° 3′ 14° 4′ u. s. w.

Die zwote Columne enthält eben dergleichen Zahlen für Bogen oder Winkel von

75° 60′ 75° 59′ 75° 58′ 75° 57′ 75° 56′ u. s. w.

Es ist aber 75° 60′ + 14° 0′ 90°

75° 59′ + 14° 1′ 90°.

u. s. w.

Für jeden gegebenen Bogen oder Winkel sind demnach nicht nur Sinus und Tangente, sondern auch Cosinus und Cotangente desselben auf einerley Seite der Tafel bestimmt. Uebrigens veranlaßt dieser Umstand, daß Anfang und Ende der Tafeln auf einerley, nemlich auf der ersten Seite derselben stehen. (3) Die beyden letzten Ziffern jeder Zahl sind von den vorhergehenden durch Puncte abgesondert worden. Diese vorhergehenden allein genommen, bestimmen nemlich die Größe der Sinus und Tangenten in Hunderttausendtheilen des Halbmessers, und sie können oft, mit Weglassung der letztern, in Fällen, die keine größere Genauigkeit erfordern, gebraucht werden. Bey den Tangenten S. 213. ist wirklich die niedrigste, und S. 212. sind beyde auf den Punct folgende Ziffern weggelassen worden.

4) Zur großen Erleichterung der trigonometrischen Rechnungen sind zugleich die Logarithmen der Zahlen der Sinus und Tangenten, jedoch nicht eigentlich der in den vorhin beschriebenen Tafeln befindlichen, sondern der vollständigeren Zahlen, welche die Größe der trigonometrischen Linien in Zehntausendmillionentheilen des Halbmessers bestimmen, berechnet worden. Die Sammlung dieser Logarithmen enthält der erste Abschnitt des Wolfischen Handbuchs von S. 1. bis 90., und es hat jede Seite dieser Tafeln eine Einrichtung erhalten, welche mit derjenigen völlig übereinstimmt, welche bey den Tafeln des vierten Abschnitts weitläuftiger angezeigt ist. Bey einiger Uebung wird es daher nicht schwer seyn, den Logarithmen des Sinus oder Cosinus, der Tangente oder Cotangente eines jeden gegebenen Bogens oder Winkels unter 90° aufzusuchen. Für Bogen oder Winkel unter 45° muß man den geforderten Logarithmen von S. 1. an vorwärts und in einer ersten Columne, für Bogen oder Winkel über 45° aber von S. 90. an rückwärts und in einer zwoten Columne suchen. Sind für einen stumpfen Winkel z. B. von 150° 36′ oder für einen Bogen, der diesem Winkel zugehört, diese Logarithmen zu suchen; so wird die Zahl desselben von 180° abgezogen:

der Rest 29° 24′ ist die Zahl des Bogens oder Winkels, welchem die gesuchten Logarithmen gleichfalls zugehören, welche demnach in den Tafeln aufgesucht wird.

5) Wie, im Fall größere Genauigkeit nöthig ist, die Logarithmen für Bogen oder Winkel, deren Secunden zugleich angegeben sind, und umgekehrt, wie zu einem gegebenen Logarithmen, der in der Tafel nicht befindlich ist, der zugehörige Bogen oder Winkel bis auf Secunden gefunden werde, werden folgende Beyspiele deutlich machen:

Erstes Beyspiel. Es sey der Logarithme des Sinus eines Winkels von 35° 36′ 40″ zu finden, so werden (1) die in den Tafeln zunächst auf einander folgenden Logarithmen der Sinus von 35° 36′ und 35° 37′, zwischen welche der gesuchte fallen muß, aufgesucht, und deren Unterschied gefunden.

$$\begin{array}{rl} \text{l sin } 35^\circ 37' = & 9{,}7651911 \\ -\text{l sin } 35^\circ 36' = & 9{,}7650147 \\ \hline \text{Unterschied} & 0{,}0001764 \end{array}$$

(2) Hierauf wird folgende Frage durch die Regel de tri aufgelöst: Wenn zween Winkel um 1′ oder 60″ unterschieden sind, so sind die Logarithmen oder Sinus um 0,0001764 unterschieden, wie groß ist der Unterschied der Logarithmen der Sinus zweyer Winkel, wenn diese nur um 40″ von einander unterschieden sind. Die Rechnung ist folgende:

$$\begin{array}{lcccl} & 60'' : 40'' & = & 0{,}0001764 : & \text{vierte Pr. Z.} \\ \text{oder} & 3 : 2 & = & 0{,}0001764 : & \text{— —} \\ \text{oder} & 1 : 2 & = & 0{,}0000588 : & \text{— —} \\ & & & 2 & \\ \hline & & & 0{,}0001176 & \text{gesuchter Unterschied.} \end{array}$$

(3) Der gefundene Unterschied wird hierauf zu l sin 35° 36′ addirt. Die Summe 9,7651323 ist der gesuchte l sin 35° 36′ 40″.

Zweytes Beyspiel. Es sey der Logarithme einer Tangente 9,2835242 gegeben; und der ihr zugehörige Winkel bis auf Secunden zu bestimmen; so werden (1) in den Tafeln die beyden zunächst auf einander folgenden Logarithmen der Tangenten aufgesucht, zwischen welche der gegebene fallen muß, (sie sind hier l tang 10° 52′ und l tang 10° 53′) und deren Unterschied sowol als auch der Unterschied des Kleineren derselben von dem gegebenen genommen.

lc 10° 53′ = 9,2839070		gegeb. Logar.	9,2835242
lc 10° 52′ = 9,2832251		lc 10° 52′ =	9,2832251
erster Unterſch.	0,0006819	zweyt. Unt.	0,0002991

(2) Hierauf wird folgende Frage durch die Regel de tri aufgelöſt: Wenn die Logarithmen zwoer Tangenten um 0,0006819 unterſchieden ſind, ſo ſind die ihnen zugehörigen Winkel um 1′ oder 60″ unterſchieden, wie groß iſt der Unterſchied der Winkel, wenn die Logarithmen ihrer Tangenten nur um 0,0002991 unterſchieden ſind?

0,0006819 : 0,0002991 = 60″ : v. P. z.
oder 6819 : 2991 = 60 : — —
60

6819) 179460 | 26″ geſuchter Unterſch.

(3) Der gefundene Unterſchied wird hierauf zu dem kleineren Winkel, 10° 52′, addirt. Die Summe 10° 52′ 26″ iſt der geſuchte Winkel, und es iſt 9,2835242 = l tang 10° 52′ 26″.

In ſehr vielen Fällen iſt es indeſſen hinlänglich, denjenigen Winkel oder Bogen für den geſuchten anzuſehn, deſſen zugehöriger Logarithme der Tafeln dem gegebenen am nächſten kommt. Die Gründe dieſer Rechnungen beruhen übrigens darauf, daß die Reihen der Logarithmen, welche Winkeln oder Bogen zugehören, die nur um 1 bis 60 Secunden unterſchieden ſind, als arithmetiſche Reihen angeſehn werden können.

51. Welches ſind die vornehmſten Lehrſätze der Trigonometrie?

1) Die Sinus jeder zween Winkel eines Dreyecks verhalten ſich gegen einander, wie die Seiten, welche dieſen Winkeln gegenüber liegen.

Z. B. In Fig. 37* iſt $\sin A : \sin B = BC : AC$
$\sin A : \sin C = BC : AB$
$\sin B : \sin C = AC : AB$

Anmerk. 1) Für ein rechtwinklichtes Dreyeck, z. B. ABC Fig. 34. kann in dieſen Proportionen r anſtatt $\sin B$ geſetzt werden, und weil in demſelben jeder ſpitze Winkel die Ergänzung des andern zu R iſt, ſo iſt auch $\sin A = \cos C$; und $\sin C = \cos A$. Daher kann unter andern die obige zweyte Proportion auch folgendergeſtalt ausgedruckt werden:

$$\cos C : \sin C = BC : AB$$

da nun $\cos C : \sin C = r : \text{tang } C$ (Fr. 36, 1.)

so ist auch $r : \text{tang } C = BC : AB$

b. l. In jedem rechtwinklichten Dreyeck ABC verhält sich jeder Cathete zum andern, wie der Sinus totus zur Tangente des Winkels, welcher diesem andern Catheten gegenüberliegt. Es ist nemlich auch $r : \text{tang } A = AB : BC$.

2) Wenn in diesen bey allen Dreyecken geltenden Proportionen ein Glied unbekannt ist; so kann dasselbe aus den drey übrigen bekannten Gliedern durch Hülfe der Tafeln gefunden werden. Ist daher z. B. eine Seite eines Dreyecks nach diesen Proportionen zu berechnen, so muß der dieser Seite gegenüberliegende Winkel bekannt seyn, und umgekehrt.

3) In Fig. 33 ist in dem Dreyeck ABC; $AB : AC = \sin ACB : \sin ABC$
in dem Dreyeck ADC; $AD : AC = \sin ACB : \sin ADC$.

Wenn nun $AB = AD$; so sind in beyden Proportionen die drey ersten Glieder gleich, folglich auch die vierten, und es ist $\sin ABC = \sin ADC$. Es ist nemlich $ADC + ABC = 2R$ weil $ADB = ABC$ ist. Wenn überhaupt die in dergleichen Proportionen berechnete vierte Proportionalzahl ein Sinus oder auch Tangente ist; so kann der dieser Zahl zugehörige Winkel sowol ein spitzer, als auch der stumpfe Winkel seyn, welcher jenes Winkels Ergänzung zu $2R$ ist.

2) Die Summe jeder zwo Seiten eines jeden Dreyecks verhält sich zum Unterschiede derselben, wie die Tangente eines Winkels, welcher der halben Summe, zur Tangente eines Winkels, welcher dem halben Unterschiede der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel gleich ist.

Z. B. Wenn in Fig. 53. A der größte, und C der kleinste Winkel des Dreyecks ABC, folglich $BC > AC$ und $AC > AB$ ist, so ist

$$AC + AB : AC - AB = \text{tang } \tfrac{1}{2}(B + C) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(B - C)$$
$$BC + AC : BC - AC = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$BC + AB : BC - AB = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A + C) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A - C)$$

Anmerk. 1) Dieser Lehrsatz wird in der Trigonometrie unter andern durch Hülfe eines andern Lehrsatzes brauchbar, welcher durch die Buchstabenrechenkunst leicht bewiesen werden kann. Er ist folgender: Wenn die Hälfte des Unterschieds

schieds zwoer Größen zu der Hälfte ihrer Summe addirt wird; so ist die Summe der größern; wenn aber eben diese Hälfte des Unterschiedes von der Hälfte der Summe abgezogen wird; so ist der Rest der kleinern dieser Größen gleich. Z. B. Die Summe der Zahlen 16 und 24 ist 40; ihr Unterschied 8; und es ist $\frac{40}{2} + \frac{8}{2} = 24$; und $\frac{40}{2} - \frac{8}{2} = 16$.

2) Wenn daher Summe und Unterschied zwoer Zahlen bekannt ist, so kann jede dieser Zahlen durch eine leichte Rechnung gefunden werden. In Fig. 53. sey der Winkel $ACB = 66° 14'$; so ist dessen Ergänzung zu 2R, oder $A + B = 113° 46'$ und $\frac{1}{2}(A + B) = 56° 53'$. Wenn nun $\frac{1}{2}(A - B) = 10° 52'$ angenommen wird; so werden die Winkel A und B selbst folgendergestalt gefunden:

$\frac{1}{2}(A + B) = 56° 53'$ $\quad \frac{1}{2}(A + B) = 56° 53'$ Probe $ACB = 66° 14'$

$+\frac{1}{2}(A - B) = 10° 52'$ $\quad +\frac{1}{2}(A - B) = 10° 52'$ $\quad A = 67° 45'$

$A = 67° 45'$ $\quad B = 46° 1'$ $\quad B = 46° 1'$

$ABC + A + B = 180°$

§2. Wie können aus gegebenen Stücken, welche ein Dreyeck bestimmen, die übrigen Stücke desselben trigonometrisch berechnet werden?

Erster Fall. Wenn eine Seite und zween Winkel nebst deren Lage gegen diese Seite gegeben sind.

1) Es wird zuvörderst der dritte Winkel des Dreyecks, welcher die Ergänzung der gegebenen zu 2R ist, gefunden.

2) Hierauf wird, um jede der beyden übrigen Seiten zu finden, geschlossen: Wie sich verhält der Sinus des Winkels, welcher der gegebenen, zum Sinus des Winkels, welcher der gesuchten Seite gegenüber liegt; so verhält sich die gegebene Seite zu der gesuchten. In dieser Proportion wird das vierte Glied aus den drey ersten, und zwar am bequemsten durch Hülfe der Logarithmen, berechnet.

Beyſpiel. Es ſey Fig. 54. $AC = 368'$; $A = 58° 9'$; $C = 76° 15'$; und es ſey AB zu finden; ſo iſt

I. $A + C = 134° 24'$ und $180° - 134° 24' = 45° 36' = B$.

II. $\sin B : \sin C = AC : AB$

folglich $l \sin B - l \sin C = l AC - l AB$

I. $l \sin B = l \sin 45° 36' = 9,8539856$

II. $l \sin C = l \sin 76° 15' = 9,9873722$

III. $l AC = l 368 = 2,5658478$

$II + III = 12,5532200$

$II + III - I = 2,6992344 = l 500,3$

Demnach iſt die geſuchte Seite $AB = 500',3$.

Anmerk. 1) Es erhellt hieraus zugleich, wie die Aufgabe der Geometrie, auf welche ſich die 54ſte Figur beziehet, durch Hülfe der Trigonometrie genauer, als durch Zeichnung geſchehen kann, aufgelöſt werden könne. Aehnliche trigonometriſche Rechnungen laſſen die Aufgaben zu, auf welche ſich Fig. 53. 55. 56. 57. beziehn.

2) Aus Fr. 51. 1) Anmerk. 1) erhellt, wie bey Berechnung rechtwinklichter Dreyecke, zu einiger Erleichterung der Rechnung, die hier gegebene Regel abgeändert werden könne.

Zweyter Fall. Wenn zwo Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel gegeben ſind.

1) Es wird zuvörderſt die Summe der beyden andern Winkel des Dreyecks, welche die Ergänzung des gegebenen Winkels zu 2R iſt, gefunden.

2) Aus der Hälfte dieſer Summe und den gegebenen Seiten wird hierauf nach dem obigen zweyten Lehrſatz (Fr. 51.) die Hälfte des Unterſchiedes dieſer Winkel berechnet.

3) Aus den gefundenen Hälften der Summe und des Unterſchiedes beyder Winkel, werden ſodann die Winkel ſelbſt gefunden, und

4) Enb-

4) Endlich wird die dritte Seite des Dreyecks nach dem ersten Fall berechnet.

Beyspiel. Es sey in Fig. 53. $AC = 356$; $BC = 458'$; $ACB = 66° 14'$, wie Fr. 51. 2) Anmerk. 2) angenommen, und woraus daselbst $\frac{1}{2}(A+B) = 56° 53'$ gefunden worden; so wird $\frac{1}{2}(A-B)$ durch folgende Rechnung gefunden:

$BC + AC : BC - AC = \text{tang}\frac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\frac{1}{2}(A-B)$

d. i. $814 : 102 = \text{tang}\, 56° 53' : \text{tang}\frac{1}{2}(A-B)$

$1814 =$	2,9106244
$1102 =$	2,0086002
$\text{lt}\, 56° 53' =$	10,1855484
	12,1941486
	$9,2835242 = \text{lt}\, 10° 52'$

Demnach ist $\frac{1}{2}(A-B) = 10° 52'$, wie a. a. O. gleichfalls angenommen, und woraus daselbst $A = 67° 45'$ und $B = 46° 1'$ gefunden ist. Hieraus kann nun AB durch eine der folgenden Proportionen nach dem ersten Fall berechnet werden:

$$\text{sin}\, B : \text{sin}\, ACB = AC : AB$$
$$\text{oder } \text{sin}\, A : \text{sin}\, ACB = BC : AB$$

Anmerk. 1) Der bey dieser Rechnung gefundene Logarithme fällt eigentlich zwischen $\text{l tang}\, 10° 52'$ und $\text{l tang}\, 10° 53'$, und er ist der eben (Fr. 50. 3) Anmerk. 5. Beysp. 2) angenommene, woraus erhellt, daß $\frac{1}{2}(A-B)$ eigentlich $10° 52' 26''$ sey, wodurch A und B genauer gefunden werden können.

a) Eben dieser Logarithme ist auch $\text{l tang}\,(180° - 10° 52')$ d. i. $\text{l tang}\, 169° 8'$; es kann aber die Hälfte des Unterschiedes zweener Winkel eines Dreyecks nie einem stumpfen Winkel gleich seyn, und es ist daher der in den Tafeln angegebene spitze Winkel bey dieser Rechnung allemal der gesuchte.

2) Wenn das gegebene Dreyeck gleichschenklicht, und nach dem hier angenommenen Fall ein Winkel desselben bekannt ist, so sind auch die übrigen Winkel desselben bekannt, und es kann aus den gegebenen Schenkeln desselben die Grundlinie leichter nach dem ersten Fall berechnet werden.

4) Wenn das gegebene Dreyeck rechtwinklicht, z. B. Fig. 34. ABC, und der rechte Winkel, nebst den Catheten, gegeben ist, so wird einer der spitzen Winkel C oder A leichter nach Fr. 51. 1) Anmerk. 1) berechnet.

Dritter Fall. Wenn ein Winkel und zwo Seiten gegeben sind, deren eine dem gegebenen Winkel gegenüber liegt.

1) Es wird zuvörderst der Winkel gesucht, welcher der andern gegebenen Seite gegenüber liegt, indem geschlossen wird: Wie sich verhält die Seite des Dreyecks, welche dem gegebenen, zu der Seite, welche dem gesuchten Winkel gegenüber liegt; so verhält sich der Sinus des gegebenen zum Sinus des gesuchten Winkels.

2) Hierauf werden die übrigen Stücke des Dreyecks nach dem **ersten Fall** berechnet.

Erstes Beyspiel. Es sey Fig. 37. der gegebene Winkel $b = 59° 30'$; $ac = 25$; $ab = 16$; so ist die Proportion folgende:

$$ac : ab = \sin b : \sin c$$

folglich $l\,25 - l\,16 = l \sin 59° 30' - l \sin c$

Die Rechnung giebt $l \sin c = 9{,}7415004$, welcher dem $l \sin 33° 28'$ am nächsten kommt. Demnach ist c entweder $33° 28'$ oder $180° - 33° 28'$ d. i. $146° 32'$. Die hier vorausgesetzte Beschaffenheit des Dreyecks entscheidet es, daß $c = 33° 28'$ seyn müsse. Es ist nemlich $ab < ac$, woraus folgt, daß $c < b$ sey.

Zweytes Beyspiel. Es sey in dem Dreyeck ABC, Fig. 33. $ACB = 36° 15'$; $AC = 67'$; $AB = 42'$; so ist die Proportion folgende:

$$AB : AC = \sin ACB : \sin ABC$$

folglich $l\,42 - l\,67 = l \sin 36° 15' - l \sin ABC$

Die Rechnung giebt $l \sin ABC = 9{,}9746405$, welcher sowol $l \sin 70° 37'$ als $l \sin 109° 23'$ ist. Die gegebenen Stücke entscheiden hier nicht, welcher von beyden Werthen der gesuchte ist; sie bestimmen nemlich nicht ein Dreyeck, sondern zwey, ABC und ADC. In dem erstern ist der Winkel $ABC = 70° 37'$ in dem andern ist $ADC = 109° 23'$. (Man vergl. Fr. 45. Anmerk. 1. und Fr. 51. 1) Anmerk. 3).

Anmerk. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck, z. B. ABC Fig. 34. außer dem rechten Winkel die größte Seite AC, und eine der beyden übrigen BC, gegeben sind; so finder

findet man A aber C durch eine der folgenden Proportionen.

$$AC : BC = r : \sin A$$
$$AC : BC = r : \cos C$$

Vierter Fall. Wenn die drey Seiten des Dreyecks gegeben sind.

(I) Wenn das Dreyeck **gleichschenklicht** ist, z. B. ABC Fig. 32.; so wird in einem der rechtwinklichten Dreyecke, ABD, in welche die aus der Spitze gegen die Grundlinie senkrechte Linie AD dasselbe theilt, der Winkel an der Grundlinie ABC nach dem **dritten Fall** (**Anmerk.**) gefunden. Hiedurch werden zugleich die übrigen Winkel des Dreyecks bekannt.

Z. B. Es sey AB = 134; BC = 56,66; folglich BD = 28,33; so ist die Proportion, durch welche der Winkel ABC gefunden wird, folgende:

$$AB : BD = r : \cos ABC$$

folglich $l\,134 - l\,28{,}33 = l\,r - l\cos ABC$

$$l\,134 = 1{,}5314789$$
$$l\,28{,}33 + l\,r = 11{,}4522466$$

$$l\cos ABC = 9{,}9207677.$$

Weil $l\,r = 10$, so ist zur Kennziffer 1 von $l\,28{,}33$ sogleich 10 addirt worden, wodurch die zweyte Zeile entstanden ist. Der gefundene Logarithme kommt dem Logarithmen 9,9207717 am nächsten. (Wolf. Tak. N. 68.) Dieser ist $l \sin 56° 26'$. In derselben Zeile, in welcher er steht, stehen in der ersten Columne derselben Seite die Logarithmen für 33° 34'; demnach ist $l \sin 56° 26'$, zugleich $l \cos 33° 34'$, und der Winkel ABC ist 33° 34', BAD aber 56° 26'. Es kann nemlich der gesuchte Winkel nie stumpf seyn.

(II) Wenn das Dreyeck **ungleichseitig** ist; z. E. ACD Fig. 13.

1) Wenn aus dem einen Endpunct C der kleinsten Seite desselben CD ein Kreis, dessen Halbmesser dieser Seite gleich ist, beschrieben wird; so durchschnei-

bet derselbe die beyden andern Seiten in F und B, und der Punct A, in welchem diese zusammentreffen, fällt außerhalb des Kreises. Wenn zugleich CF gezogen wird, so entsteht ein gleichschenklichtes Dreyeck CDF, dessen Seiten CD, CF bekannt sind, und welches mit dem Dreyeck ACD den Winkel CDA gemeinschaftlich hat. Wenn in diesem Dreyeck noch DF gefunden wird; so kann in demselben auf die vorhin (1) angezeigte Art der Winkel CDA berechnet werden.

2) Es ist aber $DF = AD - AF$, wo AD bekannt, und AF (nach §. 20. Anmerk. 6. S. 254. Beysp. 2) durch folgende Proportion

$$AD : AE = AB : AF$$

bestimmt, folglich gleichfalls bekannt wird, wenn ausser AD, auch die beyden mittlern Glieder dieser Proportion, AE und AB, angegeben werden können.

3) Nun ist $AE = AC + CE$

$AB = AC - CB$

und CE, CB sind der Seite CD gleich. Folglich ist

$AE = AC + CD$

$AB = AC - CD$

und die Proportion $AD : AE = AB : AF$ kann auch folgendergestalt ausgedruckt

$$AD : AC + CD = AC - CD : AF$$

folglich AF aus den gegebenen Seiten des Dreyecks ACD gefunden werden.

4) Hieraus ergiebt sich der Gang der Rechnung: nemlich: Man sucht zuvörderst AF (nach 3), hierauf DF (nach 2), sodann den Winkel CDA (nach 1).

5) Einer der übrigen Winkel, am bequemsten der der kleinsten Seite CD gegenüberstehende CAD, (weil dieser